М Е Х А Н И К А

УДК 539.3 DOI: 10.5281/zenodo.20799590 EDN: ZFPWGG

КОНЦЕНТРАЦИЯ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ В УЗКОЙ ПЬЕЗОПОЛОСЕ С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ, ТРЕЩИНАМИ И ВЫЕМАМИ

© 2026. ***С. А. Калоеров, А. В. Сероштанов***

С использованием комплексных потенциалов теории изгиба тонких пьезоплит решена задача об изгибе узкой полосы с произвольными отверстиями и трещинами, в том числе выходящими на прямолинейные границы. При этом функции, голоморфные вне отверстий и трещин, разложены в ряды Лорана, а функции, голоморфные в сплошной полосе, выбраны в виде сумм функций, голоморфных вне воображаемых симметричных контуров относительно верхней и нижней прямолинейных границ полосы. Определение неизвестных коэффициентов рядов обобщенным методом наименьших квадратов сведено к переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием, в том числе выходящим на одну из прямолинейных границ, для полосы с круговым отверстием и краевой трещиной из него в перемычке, в том числе выходящей на прямолинейную границу. Исследованы закономерности изменения электромагнитоупругого состояния плиты в зависимости от геометрических характеристик отверстий и трещин, их взаиморасположения. Установлено, что с приближением отверстия или трещины к прямолинейным границам значения изгибающих моментов в точках перемычки резко возрастают, незначительно изменяясь в других зонах полосы. Большая концентрация моментов наблюдается и в точках прямолинейных границ полосы вблизи перемычек. Значения этих моментов особенно велики в случае полосы с круговым отверстием и краевой трещиной из него. На значения изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала, особенно в зонах высокой концентрации изгибающих моментов, поэтому в этих случаях нельзя ограничиваться решением задачи теории упругости об изгибе плиты, а нужно решать задачу электромагнитоупругости.

Ключевые слова: тонкая пьезоплита, полоса, отверстия, трещины, комплексные потенциалы, обобщенный метод наименьших квадратов, концентрация изгибающих моментов, коэффициенты интенсивности моментов.

Введение. Тонкие пластинки с отверстиями и трещинами из пьезоматериалов получили широкое применение в качестве элементов различных конструкций современной науки и техники [1–5]. Под действием различных механических сил и электромагнитных полей около таких отверстий и трещин могут возникать высокие концентрации напряжений и индукций электрического и магнитного полей, что нужно учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Следовательно, нужно иметь надежные методы определения электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) пластин с различными отверстиями и трещинами.

Эти вопросы особенно актуальны для случая тонких пластин, эксплуатируемых в условиях их поперечного изгиба и называемых в этом случае тонкими плитами. К сожалению, до недавнего времени широкомасштабные исследования ЭМУС тонких пьезоплит с отверстиями и трещинами не проводились. Были решены лишь отдельные задачи для пьезоплит из материалов простейшей микроструктуры (с ограничениями на электромагнитные свойства) и геометрии (в основном сплошных или имеющих круговую границу) [6–16]. Так, для сплошной прямоугольной плиты были решены задачи о действии поперечной сосредоточенной силы во внутренней точке [9],

о действии по верхнему основанию различных непрерывных нагружений силовых [11] или электромагнитных [12], дано решение задачи для многослойной плиты с пористой сердцевиной [14]; были получены решения задач для круглой наноплиты с поверхностными эффектами [13], такими как поверхностная упругость, поверхностное остаточное напряжение, поверхностные пьезоэлектричество и пьезомагнетизм, а также задача для защемленной трансверсально-изотропной круговой кольцевой плиты под действием равномерного давления по верхнему основанию [16]; получено аналитическое решение задачи об изгибе бесконечной трансверсально-изотропной пьезоэлектрической плиты с круговым отверстием [8].

Что касается многосвязных тонких пластин, то исследования по определению их ЭМУС начали проводиться лишь в последние десятилетия. И здесь наиболее достоверные результаты получаются при использовании комплексных потенциалов электромагнитоупругости. Эти функции сначала были введены для общей двумерной и плоской задачи с их использованием при решении различных задач [17]. Несколько позже, в статье [18] были введены комплексные потенциалы теории изгиба тонких пьезоплит, с помощью которых были решены различные задачи для многосвязной плиты [19]. Они были использованы и при решении задач для многосвязной полуплоскости с точным удовлетворением граничным условиям методом интегралов типа Коши [20] для случая внутренних отверстий и трещин, и приближенным удовлетворением этим условиям [21] для случая, когда отверстия и трещины могут пересекать прямолинейную границу. В последнем случае граничные условия удовлетворялись на множестве «коллокационных» точек отрезка прямолинейной границы в зоне влияния отверстий и трещин на значения искомых величин вблизи этой границы. При этом как в первом, так и во втором случае граничные условия на контурах отверстий и трещин удовлетворялись обобщенным методом наименьших квадратов (ОМНК) [22], который заключается в том, что условия удовлетворяются в некотором наборе «коллокационных» точек с получением переопределенной системы линейных алгебраических уравнений с гораздо большим количеством уравнений, чем количество неизвестных.

В данной работе последний подход решения задачи распространен на пьезополосу с произвольными отверстиями и трещинами, которые в частных случаях не только сами могут пересекаться, но и пересекать прямолинейные границы полосы. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием, с круговым отверстием и краевой трещиной из него в перемычке, рассмотрены случаи полосы с круговым выемом, с круговым отверстием и разрезом между ним и прямолинейной границей.

1. Постановка и решение задачи. Рассмотрим пьезополосу, занимающую многосвязную область, ограниченную прямолинейными границами L^+ (верхней), L^- (нижней) и контурами эллиптических отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$ с полуосями a_l, b_l (рис. 1). Эллипсы могут переходить в прямолинейные разрезы-трещины, пересекать прямолинейные границы, пересекаться между собой, аппроксимировать контуры отверстий произвольной конфигурации. Отнесем плиту к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полосы и осью Ox, параллельной прямолинейным границам. Обозначим расстояния от начала координат до прямолинейных границ L^+, L^- соответственно через h^+ и h^-. Выберем локальные

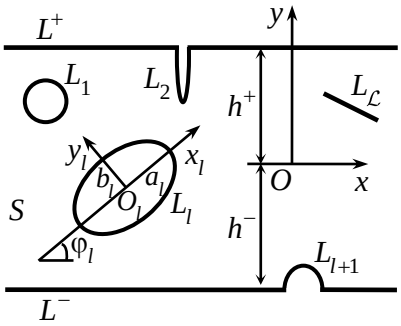


Рис. 1. Схема расчетной области

системы координат $O_l x_l y_l$ с началами в центрах эллипсов L_l и осями $O_l x_l$ вдоль полуосей a_l, отсчитываемых от положительного направления Ox против часовой стрелки. Тогда в системе Oxy уравнения L_l записываются в виде

$$x = x_{0l} + x_l \cos\varphi_l - y_l \sin\varphi_l, \quad y = y_{0l} + x_l \sin\varphi_l + y_l \cos\varphi_l, \tag{1}$$

где

$$x_l = a_l \cos\theta, \quad y_l = b_l \sin\theta;$$

φ_l – угол между положительными направлениями осей Ox и $O_l x_l$, отсчитываемый от положительного направления Ox против часовой стрелки; x_{0l}, y_{0l} – координаты начала локальной системы $O_l x_l y_l$ в основной системе Oxy; θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π.

Будем считать, что прямолинейные границы L^+, L^- не загружены, на контурах L_l действуют механические изгибающие моменты $m_l(t)$, поперечные силы $p_l(t)$, моменты электрической индукции $m_{dl}(t)$ и магнитной индукции $m_{bl}(t)$ так, что их главные векторы и главные моменты на каждом из контуров равны нулю. На бесконечности полоса не загружена или изгибается механическими моментами M_x^∞ и моментами индукций M_{dx}^∞, M_{bx}^∞; моменты M_y^∞, H_{xy}^∞, M_{dy}^∞, M_{by}^∞ в силу незагруженности прямолинейной границы равны нулю.

Задачу по определению ЭМУС рассматриваемой полосы будем решать с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [18, 19]. В таком случае она сводится к нахождению функций $W_k'(z_k)$ $\left(k = \overline{1,4}\right)$ обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \tag{2}$$

где μ_k – корни известного характеристического уравнения 8-го порядка, из граничных условий

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ik} W_k'\left(t_k\right) = f_i\left(t\right) \ \left(i = \overline{1,4}\right), \tag{3}$$

в которых

$$\left(g_{1k}, g_{2k}, g_{3k}, g_{4k}\right) = \left(p_k/\mu_k, q_k, d_{yk}, b_{yk}\right),$$

p_k, q_k, d_{yk}, b_{yk} – известные постоянные [18];

$$\left(f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t),\ f_4(t)\right) = \left(\int_0^s \left(m(s)dy + f(s)dx\right) - cx + c_1,\right.$$

$$\left.\int_0^s \left(m(s)dx - f(s)dy\right) + cy + c_2,\ -\int_0^s m_d(s)ds + c_3, -\int_0^s m_b(s)ds + c_4\right);$$

$$f(s) = \int_0^s p(s)ds,$$

на контурах отверстий; $f_i(t)=c_i$ на прямолинейных границах; c – вещественная, c_i – комплексные постоянные.

Обозначим исходную многосвязную область, ограниченную прямолинейными границами и контурами отверстий через S, верхнюю полуплоскость с границей L^+ – через S^+, нижнюю полуплоскость с границей L^- – через S^-. В областях комплексных переменных z_k $\left(k=\overline{1,4}\right)$ исходной области S соответствуют многосвязные полосы S_k с прямолинейными границами L_k^+, L_k^- и контурам отверстий контуры L_{kl}.

Функции $W_k'\left(z_k\right)$ определены в многосвязных областях S_k и на основе общих представлений комплексных потенциалов [18, 20] их можно представить в виде

$$W_k'\left(z_k\right)=\Gamma_k z_k+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}W_{kl}'\left(z_k\right)+W_k'^{+}\left(z_k\right)+W_k'^{-}\left(z_k\right), \tag{4}$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(p_k,q_k,r_k,d_{xk},d_{yk},b_{xk},b_{yk},\frac{1}{\mu_k}\right)\Gamma_k=\left(-M_x^{\infty},\,0,\,0,\,-M_{dx}^{\infty},\,0,\,-M_{bx}^{\infty},\,0,\,0\right); \tag{5}$$

r_k, d_{xk}, b_{xk} – известные постоянные [18], зависящие от коэффициентов деформации материала, пьезоэлектрических и пьезомагнитных модулей деформации и напряженностей, коэффициентов диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивостей; $W_{kl}'\left(z_k\right)$ – функции, голоморфные вне L_{kl}; $W_k'^{+}\left(z_k\right)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях с границами L_k^+; $W_k'^{-}\left(z_k\right)$ – функции, голоморфные в верхних полуплоскостях с границами L_k^-.

Используя конформные отображения внешности единичных кругов $\left|\zeta_{kl}\right|\geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl}

$$z_k=z_{kl}+R_{kl}\left(\zeta_{kl}+m_{kl}/\zeta_{kl}\right), \tag{6}$$

где

$$z_{kl}=x_{0l}+\mu_k\,y_{0l},$$
$$R_{kl}=\left(a_l\left(\cos\varphi_l+\mu_k\sin\varphi_l\right)+ib_l\left(\sin\varphi_l-\mu_k\cos\varphi_l\right)\right)/2,$$
$$m_{kl}=\left(a_l\left(\cos\varphi_l+\mu_k\sin\varphi_l\right)-ib_l\left(\sin\varphi_l-\mu_k\cos\varphi_l\right)\right)/2R_{kl}, \tag{7}$$

функции $W_{kl}'\left(z_k\right)$, голоморфные вне контуров L_{kl}, представим рядами Лорана вида

$$W_{kl}'(z_k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n} \tag{8}$$

с неизвестными коэффициентами a_{kln}.

Для точек прямолинейных границ L^+ и L_k^+

$$x=t,\ y=i\,h^+,\ t_k=x+\mu_k y=t+\mu_k h^+,$$
$$\overline{t_{k+q-1}}=x+\overline{\mu_{k+q-1}}y=x+\mu_k h^++(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+=t_k+(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)h^+\ \left(q=\overline{1,4}\right). \tag{9}$$

Учитывая эти равенства, подставляя функции (4) в граничные условия (3) на прямолинейной границе L^+ и применяя к получаемым равенствам метод интегралов типа Коши, для функций, голоморфных в нижних полуплоскостях, получаем выражения [20]

$$W_k'^{+}\left(z_k\right)=-\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{4}\frac{\overline{r_{kk+q-1}}\,\overline{a_{k+q-1ln}}}{\left(\zeta_{k+q-1l}^{+}\right)^{n}}, \tag{10}$$

в которых ζ_{k+q-1l}^{+} – переменные, определяемые из получаемых на основе (6) и (9) конформных отображений

$$z_k=-(\overline{\mu_{k+q-1}}-\mu_k)\,h^{+}+\overline{z_{k+q-1l}}+\overline{R_{k+q-1l}}\left(\zeta_{k+q-1l}^{+}+\overline{m_{k+q-1l}}\,/\,\zeta_{k+q-1l}^{+}\right)\ \left(q=\overline{1,4}\right) \tag{11}$$

внешностей соответствующих контуров L_{k+q-1l}^{+} верхних полуплоскостей с границами L_k^{+} на внешности единичных кругов $\left|\zeta_{k+q-1l}^{+}\right|\geq 1$.

При приближенном решении задачи в функциях (4) комплексные потенциалы $W_k'^{+}\left(z_k\right)$, голоморфные в нижних полуплоскостях с границей L_k^{+} выберем не в виде совокупности 4 функций как по формуле (10), а ограничимся лишь первыми функциями (при $q=1$) [21], т. е. в виде

$$W_k'^{+}\left(z_k\right)=\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{kln}}{\left(\zeta_{kl}^{+}\right)^{n}}, \tag{12}$$

где $b_{kln}=\overline{r_{kk}}\,\overline{a_{kln}}$ – неизвестные постоянные, а ζ_{kl}^{+} – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k=-(\overline{\mu_k}-\mu_k)\,h^{+}+\overline{z_{kl}}+\overline{R_{kl}}\left(\zeta_{kl}^{+}+\overline{m_{kl}}\,/\,\zeta_{kl}^{+}\right). \tag{13}$$

Аналогичным образом получаем представления голоморфных в верхних полуплоскостях с границами L_k^{-} функций

$$W_k'^{-}(z_k)=\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{kln}}{\left(\zeta_{kl}^{-}\right)^{n}}, \tag{14}$$

в которых c_{kln} – неизвестные постоянные; ζ_{kl}^{-} – переменные, определяемые из неявных зависимостей

$$z_k=(\overline{\mu_k}-\mu_k)\,h^{-}+\overline{z_{kl}}+\overline{R_{kl}}\left(\zeta_{kl}^{-}+\overline{m_{kl}}\,/\,\zeta_{kl}^{-}\right). \tag{15}$$

Окончательно для комплексных потенциалов (4) будем иметь выражения

$$W_k'\left(z_k\right)=\Gamma_k z_k+\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{kln}\varphi_{kln}(z_k)+b_{kln}\varphi_{kln}^{+}(z_k)+c_{kln}\varphi_{kln}^{-}(z_k)\right], \tag{16}$$

в которых Γ_k – постоянные, определяемые решением системы уравнений (5);

$$\varphi_{kln}(z_k)=\zeta_{kl}^{-n},\quad \varphi_{kln}^{+}\left(z_k\right)=\left(\zeta_{kl}^{+}\right)^{-n},\quad \varphi_{kln}^{-}\left(z_k\right)=\left(\zeta_{kl}^{-}\right)^{-n}; \tag{17}$$

ζ_{kl}, ζ_{kl}^{+}, ζ_{kl}^{-} – функции, вычисляемые из неявных зависимостей (6), (13), (15); a_{kln}, b_{kln}, c_{kln} – неизвестные коэффициенты разложений функций в ряды Лорана (8), (12), (14).

Неизвестные постоянные a_{kln}, b_{kln}, c_{kln} $\left(k=\overline{1,4};\ l=\overline{1,\mathcal{L}},\ n=1,\,2,...\right)$ определим из граничных условий на прямолинейных границах L^{+}, L^{-} и на контурах отверстий L_l $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$. Для многосвязных областей эти условия удобнее использовать в дифференциальной форме, которая не будет содержать указанные выше комплексные постоянные c_l. На основе равенств (3) эти условия при дифференцировании по дуге контуров области имеют вид

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ikp}\delta_{k,s}W_k''\left(t_{kp}\right)=\frac{df_{ip}(t)}{ds},\ \left(i=\overline{1,4};\ p=\overline{1,\mathcal{L}+2}\right). \tag{18}$$

При этом для точек контуров отверстий $\delta_{k,s}=\dfrac{dt_{kp}}{ds}=\dfrac{x'+\mu_k y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$; x', y' – производные переменных (1) по параметру θ параметрического задания эллипсов; s – длина дуги контура, обходимого против часовой стрелки; для прямолинейных границ L^{+}, L^{-}, где $f_{ip}(t)=0$, $\delta_{k,s}=1$, правые части уравнений (18) равны нулю.

Граничным условиям (18) будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [22, 23, 24]. Для этого выберем «коллокационные отрезки» на прямолинейных границах L^{+} и L^{-}, затем на них и на контурах отверстий и трещин L_l $\left(l=\overline{1,\mathcal{L}}\right)$ систему точек $M_{pm}\left(x_{pm},\,y_{pm}\right)$ $\left(m=\overline{1,M_p};\ p=\overline{1,\mathcal{L}+2}\right)$, в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (16). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln}, b_{kln} и c_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{\mathcal{L}}\sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp}\delta_{k,s}\left[\varphi'_{kln}\left(t_{kpm}\right)a_{kln}+\varphi'^{+}_{kln}\left(t_{kpm}\right)b_{kln}+\varphi'^{-}_{kln}\left(t_{kpm}\right)c_{kln}\right]=$$

$$=-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ikp}\delta_{k,s}\Gamma_k\ \left(i=\overline{1,4};\ m=\overline{1,M_p};\ p=\overline{1,\mathcal{L}+2}\right). \tag{19}$$

Кроме уравнений (19), для каждого контура отверстия должны выполняться уравнения

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} ia_{kp1}=0\ \left(p=\overline{1,\mathcal{L}}\right), \tag{20}$$

следующие из условия однозначности прогиба при полном обходе контуров отверстий L_p.

Систему (19), дополненную уравнениями (20), будем решать использованием сингулярных разложений [25, 26]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln}, b_{kln} и c_{kln}, а, следовательно, и функции $W_k'(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (моменты механические изгибающие, крутящий, индукций и перерезывающие силы на основных площадках) [18, 19].

По основным характеристикам можно найти также моменты на произвольных площадках. При этом, если некоторый эллипс L_l переходит в прямолинейный разрез-трещину, то для его концов можно вычислить также коэффициенты интенсивности моментов (КИМ).

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). Эти решения получаются из приведенного решения, если в нем принять равными нулю соответственно пьезомагнитные модули деформации и напряженностей p_{ij}, коэффициенты магнитной и электромагнитной восприимчивостей ν_{ij} (в задаче ЭУ), пьезоэлектрические модули деформации и напряженностей g_{ij} коэффициенты электромагнитной восприимчивостей ν_{ij} (в задаче МУ) или и те и другие (в задаче ТУ). Но для проведения численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g'_{ij} = \lambda_g g_{ij} \ , \quad p'_{ij} = \lambda_p p_{ij} \, , \quad \nu'_{ij} = \lambda_{gp} \nu_{ij} \, ,$$

где λ_g, λ_p, λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала. При этом для задач ЭМУ нужно принять $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$, а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими: $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} \le 10^{-3}$ для задач ЭУ; $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \le 10^{-3}$ для задач МУ; $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \le 10^{-3}$ для задач ТУ.

2. Описание результатов численных исследований. Были проведены исследования для плит из материалов: 1) композит на основе титаната бария-феррита (II) кобальта $BaTiO_3$-$CoFe_2O_4$ (материал М1) [27, 28]; композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют селениду кадмия $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (М2) [29]; композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют $PZT\text{-}4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ (М3) [29].

При проведении численных исследований количество членов в бесконечных рядах (19) для каждого отверстия L_p и «коллокационных точек» M_p на этих контурах и на «коллокационных отрезках» прямолинейных границ, для которых составлялись уравнения (19), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах отверстий и на прямолинейных границах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (модуль абсолютной погрешности не превышал 10^{-3}). В качестве «коллакационных отрезков» на прямолинейных границах выбирались отрезки, за пределами которых влияние отверстий и трещин на значения исследуемых величин незначительно. В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 120 членов, на каждом из контуров отверстий и на «коллокационных отрезках» прямолинейной границы брать от 50 до 500 «коллокационных точек». При этом в качестве «коллокационных отрезков» на прямолинейных границах были отрезки длины 1–3 диаметра основного концентратора моментов с центром в точке, где наиболее существенно влияние отверстий и трещин.

В табл. 1 для задач ЭМУ и ТУ изгиба моментами $M_x^{\infty} = m_x$ полосы с центральным круговым отверстием радиуса a_1 (рис. 2) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c_1 / a_1, где c_1 – длина перемычки между контуром отверстия и границей полуплоскости. При этом характерными были точки $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$ $D(0, a_1 + c_1/2)$, $E^+(0, a_1 + c_1)$, $L^+(a_1, a_1 + c_1)$, $M^+(2a_1, a_1 + c_1)$. Для наиболее пьезоактивного материала М2 во всех точках приведены значения моментов как для задачи ЭМУ, так для задачи ТУ. Для М1 и М3 эти значения даны лишь в точке В, где они претерпевают наибольшие изменения, и в точке С, где наблюдается наибольшая концентрация моментов.

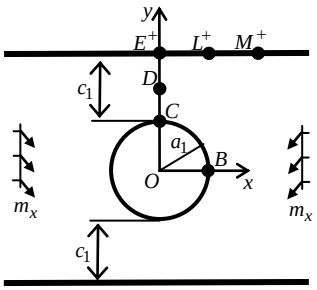


Рис. 2. Схема полосы с центральным круговым отверстием

Таблица 1

Значения изгибающих моментов в некоторых точках полосы с центральным круговым отверстием в зависимости от c_1 / a_1

Материал	Точка	Момент	Задача	c_1 / a_1				
				∞	2	1	0,5	0,1
М1	B	M_y	ЭМУ	0,231	0,232	0,233	0,232	0,214
			ТУ	0,227	0,227	0,226	0,224	0,195
	C	M_x	ЭМУ	1,813	1,998	2,341	3,151	9,608
			ТУ	1,810	1,994	2,335	3,143	9,589
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,403	1,889	2,813	9,387
	E^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,290	1,743	2,674	9,281
	L^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,209	1,371	1,513	1,596
	M^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,084	1,057	1,008	0,885
М2	B	M_y	ЭМУ	0,611	0,613	0,618	0,618	0,558
			ТУ	0,220	0,220	0,221	0,220	0,197
	C	M_x	ЭМУ	1,810	1,974	2,306	3,122	9,467
			ТУ	1,713	1,908	2,267	3,098	9,377
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,397	1,890	2,825	9,278
			ТУ	1,000	1,420	1,909	2,835	9,208
	E^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,389	1,850	2,764	9,236
			ТУ	1,000	1,317	1,791	2,730	9,136
	L^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,190	1,313	1,424	1,439
			ТУ	1,000	1,209	1,353	1,472	1,477
	M^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,050	1,044	1,004	0,874
			ТУ	1,000	1,068	1,036	0,991	0,852
М3	B	M_y	ЭМУ	0,126	0,117	0,114	0,113	0,100
			ТУ	-0,070	-0,097	-0,078	-0,068	-0,066
	C	M_x	ЭМУ	1,463	1,696	2,101	2,977	9,268
			ТУ	1,421	1,646	2,048	2,912	8,963
	D	M_x	ЭМУ	1,000	1,429	1,903	2,832	9,178
	E^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,447	1,936	2,855	9,187
	L^+	M_x	ЭМУ	1,000	1,167	1,237	1,295	1,238
	M^+	M_x	ЭМУ	1,000	0,993	0,975	0,957	0,839

На рис. 3 для полосы из наиболее пьезоактивного материала М2, для некоторых значений c_1 / a_1 изображены графики распределения M_s / m_x по контуру отверстия в зависимости от центрального угла θ, отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, а на рис. 4 изображены графики распределения моментов M_x / m_x по отрезку прямолинейной границы L^+.

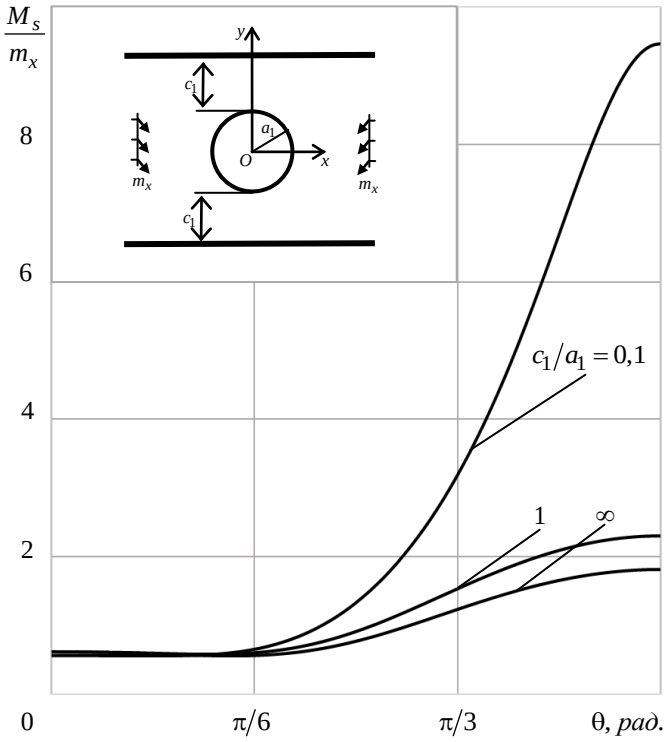


Рис. 3. Графики распределения M_s / m_x около контура кругового отверстия в полосе из материала М2 для некоторых значений c_1 / a_1

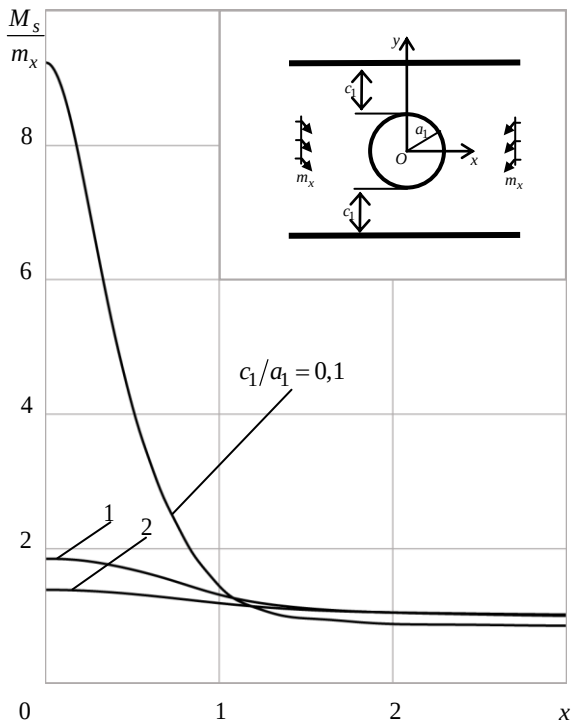


Рис. 4. Графики распределения M_x / m_x по отрезку прямолинейной границы L^+ в полосе с круговым отверстием из материала М2 для некоторых значений c_1 / a_1

В табл. 2 для задачи ЭМУ об изгибе моментами $M_x^\infty = m_x$ полосы из М2 с круговым отверстием радиуса a_1 (рис. 5, а) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов в некоторых характерных точках в зависимости от отношения c_1 / a_1, где c_1 – длина перемычки между контуром отверстия и верхней границей полосы. При этом ширина полосы равна $6a_1$, $c_2 = 4a_1 - c_1$, а характерными были точки $A(0, -a_1)$, $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$, $E^+(0, a_1 + c_1)$, $L^+(a_1, a_1 + c_1)$, $M^+(2a_1, a_1 + c_1)$, $E^-(0, -a_1 - c_2)$, $L^-(a_1, -a_1 - c_2)$, $M^-(2a_1, -a_1 - c_2)$. Отрицательные значения c_1 / a_1 относятся к случаям полосы с выемом, например, $c_1/a_1 = -1$ соответствует случаю, когда отверстие выходит на край до его горизонтального диаметра (рис. 5, б).

Таблица 2

Значения изгибающих моментов в некоторых точках полосы из материала М2 с круговым отверстием в зависимости от c_1/a_1

Точка	Момент	c_1/a_1						
		2	1	0,5	0,1	0,01	-0,5	-1
A	M_x	1,974	1,973	2,013	2,132	2,233	2,056	1,882
B	M_y	0,613	0,602	0,580	0,518	0,472	0,398	0,003
C	M_x	1,974	2,103	2,458	4,501	13,11	–	–
E^+	M_x	1,389	1,690	2,176	4,387	13,07	–	–
L^+	M_x	1,190	1,203	1,129	0,706	0,255	0,011	0,003
M^+	M_x	1,050	0,981	0,891	0,730	0,637	0,687	0,750
E^-	M_x	1,389	1,275	1,254	1,278	1,310	1,200	1,042
L^-	M_x	1,326	1,244	1,231	1,257	1,289	1,147	1,029
M^-	M_x	1,050	1,067	1,074	1,091	1,105	1,060	1,013

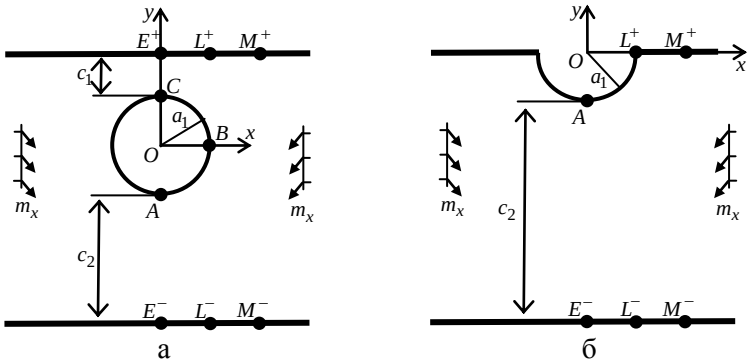
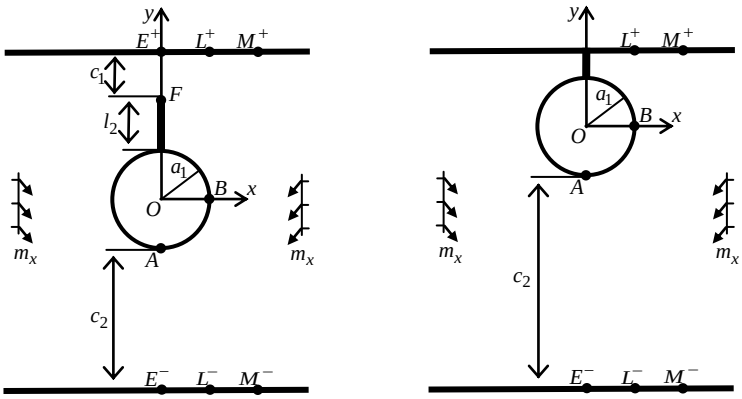


Рис. 5. Схема полосы, (а) – с круговым отверстием, (б) – с круговым выемом

Из данных табл. 1, 2 и рис. 3, 4 следует, что 1) влияние прямолинейных границ полосы на напряженное состояние около отверстия значительно, если отверстие находится на расстоянии менее диаметра отверстия от них $(c_i/a_1 < 2,\ i = 1,2)$; 2) сближение отверстия с некоторой прямолинейной границей приводит к значительному росту концентрации моментов (следовательно, и напряжений) в зоне между отверстием и этой прямолинейной границей с незначительными изменениями в других зонах; 3) при сближении отверстия с некоторой прямолинейной границей концентрация напряжений наблюдается и вблизи этой прямолинейной границы на расстояниях до радиуса отверстия; 4) при выходе отверстия на прямолинейную границу (рис. 5, б) концентрация моментов резко уменьшается вблизи выема как около контура отверстия, так и в точках прямолинейной границы; 5) на значения получаемых при решении задачи моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала полосы; так для полосы из М1 с центральным круговым отверстием при $c_i/a_1 = 0{,}1$ $(i = 1,2)$ значения моментов в точке В для задачи ЭМУ отличаются от значений тех же моментов в задаче ТУ не более чем на 10 %, для полосы из М2 это отличие составляет уже 65 %, а для полосы из М3 эти моменты оказываются разных знаков – небольшое сжатие вблизи этой точки в задаче ТУ меняется на значительное растяжение в задаче ЭМУ; 6) в полосе с отверстием (при учете влияния обеих прямолинейных границ)

значения моментов получаются несколько выше, чем в полуплоскости (при учете влияния только одной прямолинейной границы).

В табл. 3 для задачи ЭМУ об изгибе моментами $M_x^{\infty} = m_x$ полосы из материала М2 с круговым отверстием радиуса a_1 и краевой трещиной длины $l_2 = a_1$ (рис. 6, а) с точностью до множителя m_x приведены значения изгибающих моментов и КИМ k_1^+ в некоторых характерных точках полосы в зависимости от отношения c_1 / a_1, где c_1 – длина перемычки между вершиной трещины и верхней границей полосы. При этом ширина полосы равна $7a_1$, а $c_2 = 4a_1 - c_1$. Характерными были точки $A(0, -a_1)$, $B(a_1, 0)$, $F(0, 2a_1)$, $E^+(0, 2a_1 + c_1)$, $L^+(a_1, 2a_1 + c_1)$, $M^+(2a_1, 2a_1 + c_1)$, $E^-(0, -a_1 - c_2)$, $L^-(a_1, -a_1 - c_2)$, $M^-(2a_1, -a_1 - c_2)$. Отрицательные значения c_1 / a_1 относятся к случаям разреза между отверстием и верхней границей полосы (рис. 6, б), например, $c_1/a_1 = -0,5$ относится к случаю, когда длина разреза равна половине радиуса отверстия.



а б

Рис. 6. Схема полосы с круговым отверстием и краевой трещиной из него

Таблица 3

Значения изгибающих моментов в некоторых точках полосы из материала М2 с круговым отверстием и краевой трещиной из него в зависимости от c_1/a_1

Точка	Момент	c_1/a_1					
		2	1	0,5	0,1	-0,1	-0,5
A	M_x	2,044	2,064	2,103	2,112	2,621	2,461
B	M_y	0,625	0,629	0,615	0,549	0,535	0,526
F	k_1^+	1,392	1,853	2,215	2,533	–	–
D	M_x	1,482	2,008	2,937	9,008	–	–
E^+	M_x	1,569	2,045	3,022	9,053	–	–
L^+	M_x	1,146	1,221	1,148	0,865	0,121	0,012
M^+	M_x	1,084	1,006	0,946	0,790	0,502	0,406
E^-	M_x	1,487	1,344	1,282	1,258	1,468	1,351
L^-	M_x	1,251	1,192	1,231	1,184	1,370	1,275
M^-	M_x	1,085	1,097	1,123	1,074	1,200	1,142

Из данных табл. 3 и других полученных результатов следует, что сближение отверстия с краевой трещиной с границей полосы приводит к весьма высокой концентрации моментов в точках перемычки и в точках прямолинейной границы вблизи перемычки; при этом значительно увеличиваются значения КИМ для конца трещины; при выходе трещины на прямолинейную границу (полоса с отверстием и разрезом между ним и прямолинейной границей) концентрация моментов резко уменьшается.

Заключение. Таким образом, дано решение задачи об изгибе тонкой многосвязной пьезополосы с произвольно расположенными относительно друг друга и относительно прямолинейных границ отверстиями и трещинами, в том числе пересекающими друг друга и прямолинейные границы. Для решения задачи использованы комплексные потенциалы теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит [18, 21], их разложение в ряды Лорана, удовлетворение граничным условиям на контурах отверстий, трещин и на прямолинейных границах обобщенным методом наименьших квадратов. Описаны результаты численных исследований для полосы с круговым отверстием, в том числе выходящим на одну из прямолинейных границ, полосы с круговым отверстием и краевой трещиной из него в перемычке, в том числе выходящей на прямолинейную границу (случай полосы с круговым отверстием и разрезом между ним и одной из прямолинейных границ). Изучены закономерности изменения ЭМУС плиты в зависимости от ее материала и геометрических характеристик отверстий и трещин. Установлено, что, если отверстия и трещины располагаются на значительном расстоянии (более их диаметров) от одной из прямолинейных границ, то полученные результаты совпадают с аналогичными для многосвязной полуплоскости [20, 21], если же они располагаются на таком же удалении от обеих прямолинейных границ, то результаты оказываются такими, как для бесконечной многосвязной плиты. Также установлено, что на расчетные значения механических и индукционных изгибающих моментов значительно влияет учет пьезосвойств материала полосы и им пренебрегать нельзя.

Приведенное решение задачи для полосы может быть распространено на случаи конечных (в частном числе прямоугольных) пластин с произвольными отверстиями и трещинами. Установленные механические закономерности могут быть использованы специалистами в области проектирования и эксплуатации конструкций с элементами из пьезоматериалов.

Исследования проводились в ФГБОУ ВО «ДонГУ» в рамках государственного задания (шифр FRRE-2026-0021).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берлинкур, Д. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях / Д. Берлинкур, Д. Керран, Г. Жаффе // Физическая акустика. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
2. Пятаков, А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение / А. П. Пятаков // Бюл. Рос. магнит. о-ва. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
3. Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions / C.-W. Nan, M.I. Bichurin, S. Dong, D. Viehland, G. Srinivasan // J. Appl. Phys. – 2008. – V. 103, N 3. – P. 031101. DOI: 10.1063/1.2836410.
4. Tian, R. Magnetoelectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers / R. Tian, J. Liu, X. Liu // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2020. – V. 33. – P. 368–380. DOI: 10.1007/s10338-019-00129-z.
5. Srinivas, S. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites / S. Srinivas, Y.L. Jiang // Acta Mater. – 2005. – V. 53. – P. 4135–4142. DOI: 10.1016/j.actamat.2005.05.014.

6. Eringen, A.C. Electrodynamics of Continua I / A.C. Eringen, G.A. Maugin. – New York: Springer, 1990. – 436 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-3226-1.
7. Ieşan, D. On the bending of piezoelectric plates with microstructure / D. Ieşan // Acta Mech. – 2008. – V. 198, N. 3. – P. 191–208. DOI: 10.1007/s00707-007-0527-8
8. Xu, S.-P. Bending of piezoelectric plates with a circular hole / S.-P. Xu, W. Wang // Acta Mech. – 2009. – V. 203. – P. 127–135. DOI: 10.1007/s00707-008-0025-7.
9. Liu, M.F. An exact deformation analysis for the magnetoelectro-elastic fiber-reinforced thin plate / M.F. Liu // Applied Mathematical Modelling. – 2011. – V. 35, N. 5. – P. 2443–2461. DOI: 10.1016/j.apm.2010.11.044.
10. Gales, C. On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elastity / C. Gales, N. Baroiu // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2014. – V. 94, N. 1-2. – P. 55–71. DOI: 10.1002/zamm.201200219
11. Liu, M.-F. Exact solution for the bending deformations of layered magneto-electro-elastic laminates based on thin-plate formulation / M.-F. Liu // International Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2016. – V. 3, N. 4. – P. 7-15.
12. Zhou, Y. Vibration and bending analysis of multiferroic rectangular plates using third-order shear deformation theory / Y. Zhou, J. Zhu // Composite Structures. – 2016. – V. 153. – P. 712–723. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.06.064.
13. Yang, Y. Bending and free vibration of a circular magnetoelectroelastic plate with surface effects / Y. Yang, X.-F. Li // Int. J. Mech. Sci. – 2019. – V. 157-158. – P. 858–871. – DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2019.05.029.
14. Moradi-Dastjerdi, R. Thermo-electro-mechanical behavior of an advanced smart lightweight sandwich plate / R. Morandi-Dastjerdi, K. Behdinan // Aerospace Science and Technology. – 2020. – V. 106. – P. 106–142. DOI: 10.1016/j.ast.2020.106142.
15. Zheng, Y-F. Nonlinear bending analysis of magnetoelectroelastic rectangular plates using higher order shear deformation theory / Y-F. Zheng, L.-L. Xu, C.-P. Chen // J. Mech. Sci. Technol. – 2021. – V. 35, No. 3. – P. 1099–1108. – DOI: 10.1007/s12206-021-0223-y.
16. A transversely isotropic magneto-electro-elastic circular Kirchhoff plate model incorporating microstructure effect / W. Shen, G. Zhang, S. Gu, Y. Cong // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2022. – V. 35, N. 2. – P. 185–197. DOI: 10.1007/s10338-021-00271-7.
17. Калоеров, С.А. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел / С.А. Калоеров, А.В. Петренко. – Донецк: Юго–Восток, 2011.– 232 с.
18. Калоеров, С.А. Основные соотношения прикладной теории изгиба тонких электромагнитоупругих плит / С.А. Калоеров // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2022. – № 1. – С. 20–38.
19. Калоеров, С.А. Исследование электромагнитоупругого состояния конечной многосвязной тонкой плиты / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2023. – № 4. – С. 34–44. DOI: 10.15593/perm.mech/2023.4.04
20. Калоеров С. А. Решение задачи о поперечном изгибе электромагнитоупругой полуплоскости с отверстиями и трещинами / С. А. Калоеров, А. В. Сероштанов // Вестник ПНИПУ. Механика – 2025. – № 1. – С. 20–33. DOI: 10.15593/perm.mech/2025.1.02.
21. Калоеров, С.А. Решение задачи об изгибе многосвязной пьезополуплоскости с приближенным удовлетворением граничным условиям на прямолинейной границе / С.А. Калоеров, А.В. Сероштанов // Вестник Донецкого национального университета. Серия А: Естественные науки. – 2024. – № 1. – С. 28-41. DOI:10.5281/zenodo.12527097.
22. Калоеров, С.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки / С.А. Калоеров, О.А. Паршикова // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3.– С. 103–116.
23. Воеводин, В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
24. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
25. Drmaç, Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 / Z. Drmaç, K. Veseliç // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1322–1342. DOI: 10.1137/050639193.
26. Drmaç, Z. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 / Z. Drmaç, K. Veseliç // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – V. 29, N. 4. – P. 1343–1362. DOI: 10.1137/05063920X.
27. Tian, W.-Y. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids / W.-Y. Tian, U. Gabbert // Europ. J. Mech. Pt A. – 2004. – V. 23. – P. 599–614. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2004.02.002.

28. Yamamoto, Y. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures / Y. Yamamoto, K. Miya. – Amsterdam: Elsevier Sci. North Holland, 1987. – 450 p.
29. Hou, P.F. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material / P.F. Hou, G.-H. Teng, H.-R. Chen // Mech. Materials. – 2009. – V. 41. – P. 329–338. DOI: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001.

REFERENCES

1. Berlincourt D., Curran D.R., and Jaffe H., Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers. Ed. by W. P. Mason, New York, Academic Press, *Physical Acoustics*, 1964, pp. 169-270.
2. Pyatakov A.P. Magnetoelectric Materials and Their Application in Practice. *Bul. Ros. Magnit. Obshchestva*, 2006, Vol. 5, No. 2, pp.1-3.
3. Nan C.-W., Bichurin M.I., Dong Sh., Viehland D., Srinivasan G. Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions. *J. Appl. Phys.*, 2008, Vol. 103, No. 3, pp. 031101. doi: 10.1063/1.2836410.
4. Tian R., Liu J., Liu X. Magnetoelectric properties of piezoelectric-piezomagnetic composites with elliptical nanofibers. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2020, Vol. 33, pp. 368-380. doi: 10.1007/s10338-019-00126-2.
5. Srinivas S., Jiang Y.L. The effective magnetoelectric coefficients of polycrystalline multiferroic composites. *Acta Mater*, 2005, Vol. 53, pp. 4135-4142. doi: 10.1016/j.actamat.2005.05.014.
6. Eringen A.C., Maugin G.A. Electrodynamics of Continua I. New York, *Springer*, 1990, 436 p. doi: 10.1007/978-1-4612-3226-1.
7. Ieşan D. On the bending of piezoelectric plates with microstructure. *Acta Mech.*, 2008, Vol. 198, No. 3, pp. 191-208. doi: 10.1007/s00707-007-0527-8.
8. Xu S.-P., Wang W. Bending of piezoelectric plates with a circular hole. *Acta Mech*., 2009, Vol. 203., pp. 127-135. doi: 10.1007/s00707-008-0025-7.
9. Liu M.F. An exact deformation analysis for the magnetoelectro-elastic fiber-reinforced thin plate. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, Vol. 35, No. 5, pp. 2443–2461. doi: 10.1016/j.apm.2010.11.044.
10. Galeş C., Baroiu N. On the bending of plates in the electromagnetic theory of microstretch elastity. *ZAMM, Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, Vol. 94, No. 1-2, pp. 55-71. doi: 10.1002/zamm.201200219.
11. Liu M.-F. Exact solution for the bending deformations of layered magneto-electro-elastic laminates based on thin-plate formulation. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 2016, Vol. 3, No. 4, pp. 7-15.
12. Zhou Y., Zhu J. Vibration and bending analysis of multiferroic rectangular plates using third-order shear deformation theory. *Composite Structures*, 2016, V. 153, pp. 712–723. doi: 10.1016/j.compstruct.2016.06.064.
13. Yang Y., Li X.-F. Bending and free vibration of a circular magnetoelectroelastic plate with surface effects. *Int. J. Mech. Sci.*, 2019, Vol. 157-158, pp. 858–871, doi: 10.1016/j.ijmecsci.2019.05.029.
14. Moradi-Dastjerdi R., Behdinan K. Thermo-electro-mechanical behavior of an advanced smart lightweight sandwich plate. *Aerospace Science and Technology*, 2020, V. 106, pp. 106–142. doi: 10.1016/j.ast.2020.106142.
15. Zheng Y-F., Xu L.-L., Chen C.-P. Nonlinear bending analysis of magnetoelectroelastic rectangular plates using higher order shear deformation theory. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2021, Vol. 35, No. 3, pp. 1099-1108. doi: 10.1007/s12206-021-0223-y.
16. Shen W., Zhang G., Gu Sh., Cong Y. A transversely isotropic magneto-electro-elastic circular Kirchhoff plate model incorporating microstructure effect. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2022, Vol. 35, No. 2, pp. 185-197. doi: 10.1007/s10338-021-00271-7.
17. Kaloerov S.A., Petrenko A.V., Two-dimensional problems of electromagnetoelasticity for multiply connected bodies [Dvumernye zadachi elektromagnitouprugosti dlya mnogosvyaznyh tel]. Donetsk, *Yugo-Vostok*, 2011, 232 p.
18. Kaloerov S.A. Osnovnye sootnosheniia prikladnoi teorii izgiba tonkikh elektromagnitouprugikh plit [The main relations of the applied theory of bending of thin electro-magneto-elastic plates]. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 2022, No. 1, pp. 20-38.
19. Kaloerov S.A., Seroshtanov A.V. Investigation of the electro-magneto-elastic state of a finite multiply connected thin plate. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2023, No. 4, pp. 34-44. doi: 10.15593/perm.mech/2023.4.04.
20. Kaloerov S.A., Seroshtanov A.V. Solving the problem of transverse bending of an electro-magneto-elastic half-plane with holes and cracks. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2025, No. 1, pp. 20–33. doi: 10.15593/perm.mech/2025.1.02.

21. Kaloerov S.A. Reshenie zadachi ob izgibe mnogosvjaznoj p'ezopoluploskosti s priblizhennym udovletvoreniem granichnym uslovijam na prjamolinejnoj granice [Solving the problem of bending a multi-connected piezo half-plane with approximate satisfaction of boundary conditions on a rectilinear boundary]. *Bulletin of Donetsk National University. Series A: Natural Sciences*, 2024, No. 1, pp. 28-41. doi: 10.5281/zenodo.12527097.
22. Kaloerov S.A., Parshikova O.A., Thermoviscoelastic state of multiply connected anisotropic plates. *International Applied Mechanics*, 2012, Vol. 48, No. 3, pp. 319-331. doi: 10.1007/s10778-012-0523-0.
23. Voevodin V.V. Vychislitel'nye osnovy lineinoi algebry [Computational Basis of Linear Algebra]. Moskov, *Nauka*, 304 p.
24. Forsythe J. E., Malcolm M. A., and Moler C. B., Computer Methods for Mathematical Computations. *Prentice-Hall*, 1977.
25. Drmač Z., Veselič K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2008, vol. 29, no. 4, pp. 1322-1342. doi: 10.1137/050639193.
26. Drmač Z., Veselič K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 2008, vol. 29, no. 4, pp. 1343-1362. doi: 10.1137/05063920X.
27. Tian W.-Y., Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magnetoelectroelastic solids. *Europ. J. Mech. Part A*, 2004, Vol. 23, pp. 599-614. doi: 10.1016/j.euromechsol.2004.02.002.
28. Yamamoto Y., Miya K. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures, Amsterdam. *Elsevier Science-North Holland*, 1987, 450 p.
29. Hou P.F., Teng G.-H., Chen H.-R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material. *Mech. Mater*, 2009, Vol. 41., pp. 329-338. doi: 10.1016/j.mechmat.2008.12.001.

CONCENTRATION OF BENDING MOMENTS IN A NARROW PIEZO STRIP WITH ARBITRARY LOCATED HOLES, CRACKS AND RECESSES

S. A. Kaloerov, A. V. Seroshtanov

Using complex potentials of the theory of bending of thin piezo plates, the problem of bending a narrow strip with arbitrary holes and cracks, including the output to rectilinear boundaries, is solved. In this case, functions that are holomorphic outside of holes and cracks are expanded in Laurent series, and functions that are holomorphic in a solid strip are chosen in the form of sums of functions that are holomorphic outside of imaginary symmetric contours relative to the upper and lower rectilinear boundaries of the strip. The determination of unknown coefficients of series by the generalized least squares method is reduced to an overdetermined system of linear algebraic equations solved by the singular value decomposition method. The results of numerical studies are described for a strip with a circular hole, including the output to one of the rectilinear boundaries, a strip with a circular hole and an edge crack from it in a jumper, including the output to a rectilinear boundary. The regularities of changes in the electromagnetoelastic state of the plate depending on the geometric characteristics of holes and cracks, their mutual location, are investigated. It has been established that as a hole or crack approaches a rectilinear boundary, the values of moments at the points of the jumper increase sharply, changing insignificantly in other zones of the strip. A high concentration of moments is also observed at the points of the rectilinear boundaries of the strip near the jumpers. The values of these moments are especially large in the case of a strip with a circular hole and an edge crack from it. The values of bending moments are significantly affected by taking into account the piezo properties of the material, especially in areas of high concentration of bending moments, therefore in these cases one cannot limit oneself to solving the problem of elasticity theory about the bending of the plate, but it is necessary to solve the problem of electro-magneto-elasticity.

Keywords: thin piezo plate, half-plane, holes, cracks, jumper, complex potentials, generalized least squares method, bending moment concentration, moment intensity factors.

Поступила в редакцию 01.12.2025 г.

Калоеров Стефан Алексеевич
Доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского, ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: kaloerov@mail.ru,
ORCID: 0000-0003-1339-6035
SPIN-код: 8113-1310

Kaloerov Stefan A.
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Theory of Elasticity and Computational Mathematics named acad. A. S. Kosmodamianskogo, Donetsk State University, Donetsk, DPR, Russia

Сероштанов Александр Владимирович
младший научный сотрудник,
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: aleks.serosht@gmail.com,
ORCID: 0000-0003-3545-3635
SPIN-код: 5323-5904

Seroshtanov Aleksandr V.
junior research assistant,
Donetsk State University,
Donetsk, DPR, Russia