

О ФУНКЦИЯХ С НУЛЕВЫМИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ ПО РАВНОБЕДРЕННЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ТРЕУГОЛЬНИКАМ

© 2025. П. А. Машаров

Получено значение наименьшего радиуса шара, в котором из равенства нулю интегралов следует равенство нулю функции. Рассматриваются поверхностные интегралы по равнобедренным прямоугольным треугольникам в многомерном пространстве.

Ключевые слова: проблема Помпейю, экстремальный радиус Помпейю, свойства функции с нулевыми интегралами по равнобедренным прямоугольным треугольникам, локальный вариант проблемы Помпейю.

Введение. Пусть \mathbb{R}^n — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ — группа движений \mathbb{R}^n . Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если из того, что локально суммируемая функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которой при всех $\lambda \in M(n)$ выполняются равенства

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

следует, что она равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A . В данной постановке сформулированная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ получены в XX веке (см. обзор литературы в [1]).

Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [2], описывающую довольно широкий набор множеств Помпейю.

Пусть A — открытое ограниченное подмножество \mathbb{R}^n с липшицевой границей, гомеоморфной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание $\bar{A} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница A является вещественно–аналитическим подмногообразием в \mathbb{R}^n .

Ряд обобщений проблемы Помпейю связан с заменой тройки $(\mathbb{R}^n, M(n), dx)$ на тройку $(X, \mathcal{Z}, d\mu)$, где X — многообразие, \mathcal{Z} — группа Ли, действующая транзитивно на X , $d\mu$ — инвариантная относительно \mathcal{Z} мера на X [3, 4].

Другие обобщения возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, инвариантным только относительно вращений. Одно из таких обобщение известно под названием локальной проблемы Помпейю.

Постановка задачи. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R^n \subset \mathbb{R}^n$, и равенство (1) выполняется при всех $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R^n)$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ почти всюду в \mathbb{B}_R^n , будем говорить, что A является множеством Помпейю на шаре \mathbb{B}_R^n и обозначать $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$. Если $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого значения радиуса R (по сравнению с размерами множества A) выполняется $A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ [5–7].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(A) = \inf \{ R > 0 : A \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n) \},$$

Исследование проводилось по теме государственного задания № 124012400352-6

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю для множества A .

В [7] поставлена следующая

Проблема 1. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(A)$.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху величины $\mathcal{R}(A)$, получены К. А. Беренштейном и Р. Гэем [5, 6], а также В. В. Волчковым [7, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [7–15].

Выше рассматривались случаи, когда компактное множество A имеет такую же размерность, что и пространство. Пусть теперь размерность множества A равна $m \leq n$, интеграл в (1) понимается как m -кратный. Чтобы выделить такие интегралы, вместо dx будем писать $d\mu_m$. В определении множества Помпейю в \mathbb{B}_R^n для множества положительной коразмерности (если $m < n$) условие локальной суммируемости функции f заменим на непрерывность. Это обусловлено тем, что даже равная нулю почти всюду (по n -мерной мере Лебега μ_n) функция может иметь не все равные нулю интегралы, поскольку если множество A имеет размерность $m < n$, то $\mu_n(A) = 0$. Будем рассматривать совокупность $\mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)$ всех m -мерных множеств Помпейю в \mathbb{B}_R^n и величину

$$\mathcal{R}_{m,n}(A) = \inf\{R > 0: A \in \mathcal{P}_{m,n}(\mathbb{B}_R^n)\}.$$

Аналогично проблеме 1, в [16] поставлена следующая

Проблема 2. Для данного компактного $A \subset \mathbb{R}^m$ найти значение $\mathcal{R}_{m,n}(A)$.

Локальный вариант проблемы Помпейю для множеств положительной коразмерности напоминает теорему Мореры, в которой из нулевых интегралов по границам плоских множеств делается вывод о голоморфности функции. В [17] рассмотрена проблема Помпейю для шаров и сфер положительной коразмерности. Достаточно полный список множеств A , для которых известно точное значение или оценки величины $\mathcal{R}_{m,n}(A)$, можно найти в [13, 15, 18].

В данной работе проблема 2 изучаются для $T = \{x \in \mathbb{R}^n: 0 \leq x_1 \leq \sqrt{2}/2, |x_2| \leq x_1, x_k = 0, k \in \{3, \dots, n\}\}$ — плоского равнобедренного прямоугольного треугольника со стороной 1. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. Для любого $n \geq 3$ имеет место равенство $\mathcal{R}_{2,n}(T) \sqrt{2} - \sqrt{2}$.

Заметим, что $\mathcal{R}_{2,2}(T) = \sqrt{2} - \sqrt{2}$ (П. А. Машаров, 2021, [15]).

Вспомогательные обозначения и утверждения. Далее рассматриваем действительное евклидово пространство \mathbb{R}^n размерности $n \geq 3$ со стандартным скалярным произведением и евклидовой нормой $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $\mathbf{M}(n)$ — группу движений \mathbb{R}^n . Для непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ положим $\text{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n): \lambda A \subset B\}$. Для $R > 0$, $r \in \mathbb{R}$ рассмотрим множества $\mathbb{B}_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| < R\}$, $\mathbb{S}_R^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = R\}$ — соответственно шар и сфера радиуса R в \mathbb{R}^n ; $\mathbb{B}_{r,R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n: r < |x| < R\}$ — шаровой слой, если $r \geq 0$, или шар в \mathbb{R}^n , если $r < 0$. Для произвольного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ под ∂A будем понимать множество граничных точек A , а под $\bar{A} = A \cup \partial A$ — замыкание A .

Для непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $L_{loc}(B)$ будем понимать класс локально интегрируемых на B комплекснозначных функций. Так как интегрирование часто будет вестись по множествам вида λA , где множество A рассматривается m -мерным, то здесь и далее под dx в случаях $m \leq n$ понимается m -мерная мера Лебега μ_m . Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества B под $C^k(B)$ будем понимать класс функций, все частные

производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в B , $C(B)$ — класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(B)$.

Под $\mathfrak{F}(A, B)$ будем понимать класс функций из $L_{loc}(B)$, для которых равенство (1) выполняется для всех $\lambda \in \text{Mot}(\bar{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{F}^k(A, B) = \mathfrak{F}(A, B) \cap C^k(B)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}^\infty(A, B) = \mathfrak{F}(A, B) \cap C^\infty(B)$; $\mathfrak{F}_0^\infty(A, B)$ — класс радиальных функций из $\mathfrak{F}^\infty(A, B)$, то есть таких, что для любых $x, y \in B$ из $|x| = |y|$ следует $f(x) = f(y)$.

Как обычно, частная производная функции $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ по переменной x_j обозначается $\frac{\partial u}{\partial x_j}$. Символ Δ обозначает оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

Заметим, что из линейности пространств гладких и интегрируемых функций следует линейность пространств $\mathfrak{F}^k(A, B)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Для произвольного непустого $B \subset \mathbb{R}^n$, фиксированного числа $\varepsilon > 0$ и вектора $t \in \mathbb{R}^n$ положим $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n: |x - y| < \varepsilon, y \in B\}$, $B + t = \{x + t \in \mathbb{R}^n: x \in B\}$.

Доказательства следующих двух утверждения можно найти в [18].

Лемма 1. Пусть A — компакт, B — область в \mathbb{R}^n , числа $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ и $\varepsilon > 0$ фиксированы, функция $\varphi_\varepsilon \in C^k(B_\varepsilon)$ имеет носитель $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon^n$, а функция $f \in \mathfrak{F}(A, B_\varepsilon)$. Тогда свёртка $f * \varphi_\varepsilon \in \mathfrak{F}^k(A, B)$.

Лемма 2. Пусть A — компакт с внутренними точками в \mathbb{R}^m ($m \leq n$), для произвольного фиксированного значения $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ дифференциальный оператор $\mathfrak{d} = \partial/\partial x_j$. Пусть также для некоторого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$, для которого $\text{Mot}(A, B) \neq \emptyset$, выполнено $f \in \mathfrak{F}^\infty(A, B)$. Тогда $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{F}^\infty(A, B)$.

Для произвольного непустого компакта или ограниченной области $A \subset \mathbb{R}^n$ через $r^*(A)$ обозначим радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего \bar{A} . Таким образом, $r^*(A) = \inf\{R > 0: \exists \lambda \in \text{Mot}(\bar{A}, \mathbb{B}_R^n)\}$. Отметим, что из определений $r^*(A)$ и $\text{Mot}(A, B)$ следует, что для произвольного компакта A множество $\text{Mot}(A, \mathbb{B}_R^n) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $R > r^*(A)$, а для открытого ограниченного множества — когда $R \geq r^*(A)$.

Для рассматриваемого в настоящей работе множества T значение $r^*(T)$ равно радиусу описанной окружности, $r^*(T) = \sqrt{2}/2$. Отсюда следует тривиальная оценка снизу экстремального радиуса Помпейю: $\mathcal{R}_{2,n}(T) \geq \sqrt{2}/2$ для любого $n \geq 2$. С другой стороны, учитывая $\mathcal{R}_{2,2}(T) = \sqrt{2} - \sqrt{2}$, вполне естественно считать, что $\mathcal{R}_{2,n}(T) \leq \sqrt{2} - \sqrt{2}$ для всех $n \geq 2$.

Координаты точки в \mathbb{R}^n , начиная с некоторой, если они равны нулю, будем обозначать символом $\vec{0}$. Обозначим начало координат $O(\vec{0})$, вершины треугольника T : $\zeta_0 = (\vec{0})$, $\zeta_1 = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, \vec{0})$, $\zeta_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \vec{0})$, стороны, соединяющие вершины ζ_j и ζ_k — ζ_{jk} , где $j, k \in \{0, 1, 2\}$, $j < k$. Если \mathfrak{E} — элемент треугольника T (вершина, точка, сторона), то, когда будет рассматриваться треугольник λT ($\lambda \in \mathbb{M}(n)$), его соответствующий элемент будем обозначать $\lambda\mathfrak{E}$. Например, сторона треугольника ζ_{12} трансформируется в $\lambda\zeta_{12}$.

Рассмотрим дифференциальные операторы $\mathfrak{d}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\mathfrak{d}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\mathfrak{d}_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2\mathfrak{d}_3$. Замети, что для этих операторов выполняются равенства: $df(t, -t, \vec{0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dt = \mathfrak{d}_1 f dt$, $df(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}) = \frac{\partial f}{\partial x_2} dt = \mathfrak{d}_2 f dt$, $df(t, t, \vec{0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) dt = \mathfrak{d}_3 f dt$.

Лемма 3. Пусть функция $f \in C^3(T_\varepsilon)$. Тогда имеют место равенства

$$\int_T (\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 \frac{\partial}{\partial x_1} f)(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (\Delta f)(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}) dt - \mathfrak{d}_3 f(\zeta_2) - \mathfrak{d}_1 f(\zeta_1) + 2 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0); \quad (2)$$

$$- \int_T \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1^2 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \mathfrak{d}_3 f(\zeta_2) + \mathfrak{d}_1 f(\zeta_1) - 2 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0) - 2 \int_0^{\sqrt{2}/2} (\Delta f)(t, t, \vec{0}) dt. \quad (3)$$

$$\int_T \mathfrak{d} f d\mu_2 = 2(\mathfrak{d}_2 f)(\zeta_0) - (\mathfrak{d}_3 f)(\zeta_1) + (\mathfrak{d}_1 f)(\zeta_2). \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переход от кратного интеграла по T к повторному можно осуществить двумя способами:

$$\begin{aligned} \int_T f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 &= \int_0^{\sqrt{2}/2} dx_1 \int_{-x_1}^{x_1} f(x_1, x_2, \vec{0}) dx_2 = \\ &= \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} dx_2 \int_{|x_2|}^{\sqrt{2}/2} f(x_1, x_2, \vec{0}) dx_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим $\int_T \mathfrak{d}_1 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} dx_2 \int_{|x_2|}^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, \vec{0}) dx_1 - \int_0^{\sqrt{2}/2} dx_1 \int_{-x_1}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, \vec{0}) dx_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (f(\sqrt{2}/2, x_2, \vec{0}) - f(|x_2|, x_2, \vec{0})) dx_2 - \int_0^{\sqrt{2}/2} (f(x_1, x_1, \vec{0}) - f(x_1, -x_1, \vec{0})) dx_1$. Сделаем замены $t = \pm x_2$ в интеграле $-\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} f(|x_2|, x_2, \vec{0}) dx_2 = -\int_{-\sqrt{2}/2}^0 f(-x_2, x_2, \vec{0}) dx_2 - \int_0^{\sqrt{2}/2} f(x_2, x_2, \vec{0}) dx_2 = \int_{\sqrt{2}/2}^0 f(t, -t, \vec{0}) dt - \int_0^{\sqrt{2}/2} f(t, t, \vec{0}) dt$, а в остальных переменную интегрирования заменим на t . Тогда

$$\int_T \mathfrak{d}_1 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} f(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}) dt - 2 \int_0^{\sqrt{2}/2} f(t, t, \vec{0}) dt. \quad (5)$$

Учитывая теперь формулу вычисления интеграла от полного дифференциала, получаем

$$\int_T \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (\mathfrak{d}_3 f)(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}) dt - 2f(\zeta_2) + 2f(\zeta_0). \quad (6)$$

Так как $\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}) dt = f(\zeta_2) - f(\zeta_1)$, то (6) можно записать в виде

$$\int_T \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}) dt - f(\zeta_2) - f(\zeta_1) + 2f(\zeta_0).$$

Отсюда $\int_T (\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_3 \frac{\partial}{\partial x_1} f)(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}) dt - (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_1)) + 2 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0)$. Прибавляя к этому $0 = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\sqrt{2}/2, t, \vec{0}) dt - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_2) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\zeta_1)$, получаем (2).

Аналогичным образом из (5) получаем

$$\int_T \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = f(\zeta_2) - f(\zeta_1) - 2 \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(t, t, \vec{0}) dt \quad (7)$$

и

$$\int_T \mathfrak{d}_2^2 \mathfrak{d}_1 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \mathfrak{d}_2 f(\zeta_2) - \mathfrak{d}_2 f(\zeta_1) - 2 \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(t, t, \vec{0}) dt. \quad (8)$$

Так как $\int_0^{\sqrt{2}/2} \mathfrak{d}_3 f(t, t, \vec{0}) dt = f(\zeta_2) - f(\zeta_0)$, то с учётом (7) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, t, \vec{0}) dt = f(\zeta_2) - f(\zeta_0) - \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(t, t, \vec{0}) dt$; $-2 \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, t, \vec{0}) dt = -2f(\zeta_2) + 2f(\zeta_0) + f(\zeta_2) - f(\zeta_1) - \int_T \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1 f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2$; $-\int_T \mathfrak{d}_2 \mathfrak{d}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_2) - 2 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\zeta_1) - 2 \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(t, t, \vec{0}) dt$. Складывая полученное равенство с (8), получаем (3).

Для доказательства (4) подставим в (6) $\mathfrak{d}_2 f$ вместо f и поменяем местами дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Получим $\int_T \mathfrak{d} f(x_1, x_2, \vec{0}) d\mu_2 = (\mathfrak{d}_3 f)(\zeta_2) - (\mathfrak{d}_3 f)(\zeta_1) - 2(\mathfrak{d}_2 f)(\zeta_2) + 2(\mathfrak{d}_2 f)(\zeta_0) = 2(\mathfrak{d}_2 f)(\zeta_0) - (\mathfrak{d}_3 f)(\zeta_1) + (\mathfrak{d}_1 f)(\zeta_2)$. \square

Для $R > \frac{\sqrt{2}}{2}$ будем рассматривать различные положения треугольника λT внутри шара \mathbb{B}_R^3 . Обозначим $\rho_0, \rho_1, \rho_{01}, \rho_{12}, \rho_{012}$ — соответственно расстояния от начала координат до вершины $\lambda\zeta_0, \lambda\zeta_1$, до стороны $\lambda\zeta_{01}, \lambda\zeta_{12}$, до плоскости треугольника λT . Для каждого $j \in \{0, 1, 01, 12, 012\}$ положим $\min_j = \inf\{\rho_j : \lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)\}$ и $\max_j = \sup\{\rho_j : \lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)\}$, для $0 < a < b$ шаровой слой в \mathbb{R}^3 обозначим $\mathbb{B}(a; b) = \{x \in \mathbb{R}^3 : a < |x| < b\}$.

Лемма 4. Пусть $R \in (\sqrt{2}/2; 1)$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} \max_0 &= \max_1 = R, & \min_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}}; \\ \min_1 &= \sqrt{2} - R, & \min_{02} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 1}; \\ \max_{02} &= \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}, & \max_{12} &= \max_{012} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}}, & \min_{12} &= \min_{012} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

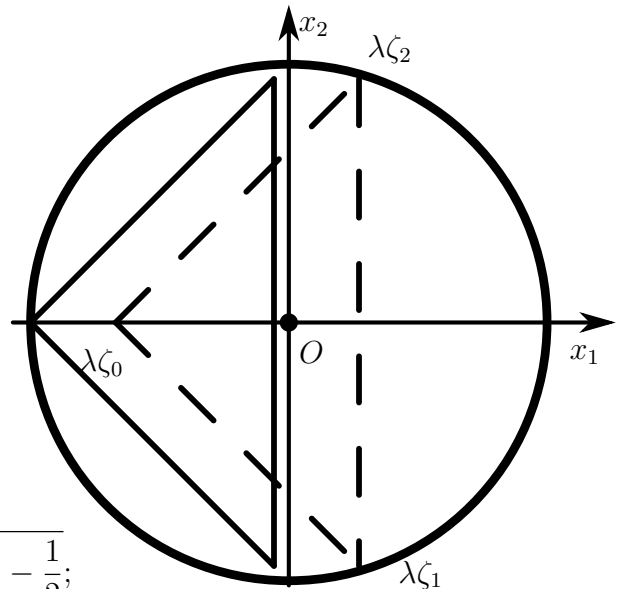


Рис. 1: Положение λT

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства будем рассматривать движения $\lambda \in \text{Mot}(T, \overline{\mathbb{B}_R^2})$, а для изучения ρ_{012} — движения $\lambda \in \text{Mot}(T, \overline{\mathbb{B}_R^3})$.

Рассмотрев λ — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $-R$ (на рис. 1 треугольник изображен сплошной линией), получаем $\max_0 = R$. Выполнив λ — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $\sqrt{R^2 - 1/2}$ (на рис. 1 треугольник изображен пунктирной линией), находим значения $\min_0, \max_1, \min_{02}$ и \max_{12} .

Рассмотрев λ — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $-\sqrt{2}/2$ и вдоль оси Ox_2 на $(R - \sqrt{2}/2)$ (на рис. 2 треугольник изображен сплошной линией), получаем $\min_1 = \sqrt{2} - R, \min_{12} = 0$. Рассмотрев λ — такой сдвиг, при котором вершины $\lambda\zeta_0$ и $\lambda\zeta_2$ окажутся на окружности $\partial\mathbb{B}_R^2$ (на рис. 2 треугольник изображен пунктирной линией), получаем $\max_{02} = \sqrt{R^2 - 1/4}$.

Рассмотрев теперь в \mathbb{R}^3 λ — сдвиг вдоль оси Ox_1 на $-\sqrt{2}/2$ и вдоль оси Ox_3 на $\sqrt{R^2 - 1/2}$, находим значение \max_{012} . Очевидно, что $\min_{012} = 0$. \square

Решим несколько неравенств с найденными выражениями. Рассмотрим $\min_0 < \max_{01}$. Имеем $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}} < \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}}$. Учитывая неотрицательность обеих частей неравенства, получаем $\frac{1}{2} - \sqrt{2R^2 - 1} + R^2 - \frac{1}{2} < R^2 - \frac{1}{4}$; $\sqrt{2R^2 - 1} > 1/4$; $2R^2 - 1 > 1/16$; $|R| > \sqrt{34}/8$.

Теперь рассмотрим $\min_{02} < \max_{12}$. Имеем $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 1} < \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}}$; $1 - 2\sqrt{2R^2 - 1} + 2R^2 - 1 < 4R^2 - 2$; $1 - R^2 < \sqrt{2R^2 - 1}$; $1 - 2R^2 + R^4 < 2R^2 - 1$; $R^4 - 4R^2 + 2 < 0$; $R^4 - 4R^2 + 4 < 2$; $-\sqrt{2} < R^2 - 2 < \sqrt{2}$; $\sqrt{2 - \sqrt{2}} < |R| < \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Так как $\sqrt{34}/8 < \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, то из приведенных рассуждений получаем

Замечание 1. Для $R \in (\sqrt{2}/2; 1)$ в обозначениях (9) решением системы неравенств $\min_0 < \max_{01}$; $\min_{02} < \max_{12}$ является $\sqrt{2 - \sqrt{2}} < R < 1$.

Для доказательства основного результата воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого можно найти в [7]. Перед его формулировкой введем используемые в нём обозначения. Для набора точек $\{v_\nu\}_{\nu=1}^k \subset \mathbb{R}^n$, где $v_i \neq v_j$ для $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$, числа $\varepsilon > 0$ положим $\Omega_{\nu,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : |v_\nu| - \varepsilon < |x| < |v_\nu| + \varepsilon\}$, $\nu = 1, \dots, k$. Для открытого непустого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ под $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$ понимается класс радиальных локально суммируемых в \mathcal{U} распределений. $\vec{\partial} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$.

Утверждение 1 (Теорема 3.2 из [7, Глава 4]). Пусть $F_\nu \in \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu,\varepsilon})$ для $\nu = 1, \dots, k$ и существуют многочлены $P_\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что для любого $x \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$ выполняется $\sum_{\nu=1}^k (P_\nu(\vec{\partial})F_\nu)(x + v_\nu) = 0$, которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен $P: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $P(\Delta)F_\nu = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$.

Лемма 5. Пусть $R > \sqrt{2}/2$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}}; R)$.

Доказательство. Применим Утверждение 1 к $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3) \subset \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu,\varepsilon})$ для набора точек $v_\nu = \zeta_j$ ($j \in \{0, 1, 2\}$) — вершин треугольника T . Учитывая равенство (4), левая часть которого в данном случае по лемме 2 обратится в нуль, приходим к тому, что существует нетривиальный многочлен $q: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$. Так как функция f общая для всех точек v_ν , то $\Omega_{\nu,\varepsilon}$ представляет из себя множество точек из \mathbb{B}_R^3 , в которые можно попасть вершинами треугольника λT , $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)$. Таким образом, $\Omega_{\nu,\varepsilon} = \mathbb{B}(\min_0; \max_0)$, что, с учётом леммы 4, завершает доказательство. \square

Для формулировки следующего утверждения рассмотрим преобразование Радона. Пусть $n \geq 2$; $\xi(\omega, d)$ — гиперплоскость с расстоянием d до начала координат, нормалью которой является вектор $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$. Преобразование Радона вводится для $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\mathbf{R}f(\omega, d) = \int_{\xi(\omega, d)} f(x) dx,$$

где в данном случае dx — $(n - 1)$ -мерная мера.

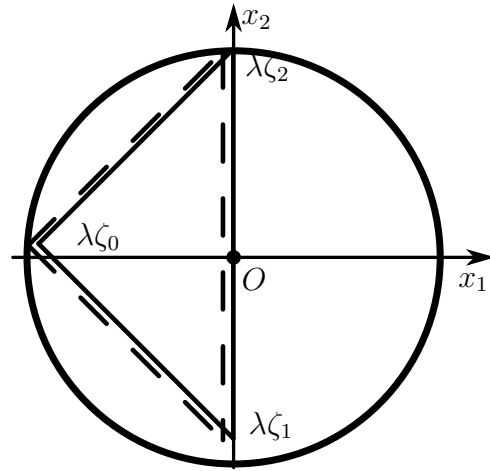


Рис. 2: Положение λT

Утверждение 2 (Следствие 8.4 из [7, Глава 1]). Пусть $r \geq 0$, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет $\mathbf{R}f(\omega, d) = 0$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ и почти всех $d \in (r, +\infty)$. Если существует множество $\Omega \subset (r, +\infty)$ положительной меры такое, что $f(x) = 0$ в $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \in \Omega\}$, тогда $f = 0$ в $\mathbb{B}(r; +\infty)$.

Лемма 6. Пусть $R > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в \mathbb{B}_R^3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многочлен q из леммы 5, для которого выполняется $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}(\min_0; \max_0)$, и функции $F = q(\Delta)f$, $\tilde{F} = \Delta F$. По лемме 2, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$. Применив лемму 2 к функции F , получаем (3), что означает выполнение равенств $\int_{\lambda\zeta_{02}} \tilde{F}(x) ds = 0$, где ds — элемент длины отрезка ζ_{02} , $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)$.

Иными словами, интегралы от \tilde{F} по всем отрезкам, расстояние от которых до начала координат лежит в пределах от \min_{02} до \max_{02} , равны нулю. Доопределив \tilde{F} нулем вне \mathbb{B}_R^3 , имеем нулевые интегралы от \tilde{F} по всем прямым, расстояние от которых до начала координат больше \min_{02} . Значит интегралы по всем плоскостям, расстояние до которых от начала координат больше \min_{02} , равны нулю, что по утверждению 2 означает $\tilde{F} = 0$ в $\mathbb{B}(\min_{02}, R)$.

Аналогичными рассуждениями, учитывая выполнение $\min_{02} < \max_{12}$ и равенство нулю интегралов от функции \tilde{F} по всем прямым, расстояние от которых до начала координат больше \min_{12} , а значит и по всем плоскостям, получаем $\tilde{F} = 0$ в $\mathbb{B}(\min_{12}, R)$, то есть в \mathbb{B}_R^3 . \square

Приведём одно довольно общее утверждение, доказательство которого можно найти в [7], предварительно пояснив смысл входящих в него обозначений.

Пусть \mathcal{U} — открытое множество в \mathbb{R}^n . Под $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ понимается класс функций из $C^\infty(\mathcal{U})$ с компактным носителем в \mathcal{U} ; $\mathcal{D}'(\mathcal{U})$ — пространство распределений на \mathcal{U} ; $SO(n)$ — группа евклидовых вращений пространства \mathbb{R}^n ; для распределения $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ и $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ распределение $\lambda\varphi$ определяется на $\mathcal{D}'(\lambda^{-1}\mathcal{U})$ формулой $\langle \lambda\varphi, f(x) \rangle = \langle \varphi, f(\lambda^{-1}x) \rangle$, где $f \in \mathcal{D}(\lambda^{-1}\mathcal{U})$, $\langle \varphi, f \rangle$ обозначает значение φ на элементе f ; $\mathcal{D}'_\varphi(\mathcal{U}) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathcal{U}) : f * \varphi = 0 \text{ в области определения}\}$; $C_\varphi^m(\mathcal{U}) = (\mathcal{D}'_\varphi \cap C^m)(\mathcal{U})$, где $m \in \mathbb{Z}_+$ или $m = \infty$; $A_\varphi^m(\mathcal{U}) = \bigcap_{\tau \in SO(n)} C_{\tau\varphi}^m(\mathcal{U})$.

Утверждение 3 (Предложение 5.9 из [7, Глава 1]). Пусть $\mathcal{U} = \mathbb{B}_R^n$ и $A_\varphi^\infty(\mathcal{U}) \neq \{0\}$. Тогда $A_\varphi^\infty(\mathcal{U})$ содержит радиальную функцию, отличную от нуля.

Взяв $\varphi = \chi_T$ — индикатор множества T , получаем

Следствие 1. Пусть для некоторого $R > 0$ выполняется $\mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3) = \{0\}$. Тогда $\mathfrak{P}^\infty(T, \mathbb{B}_R^3) = \{0\}$.

Методом, аналогичным изложенному при доказательстве Леммы 7 из [15], получаем следующее утверждение.

Лемма 7. Пусть $R > \sqrt{2}/2$, для некоторой функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R^3)$ и для некоторого многочлена $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ выполняется $q(\Delta)f = 0$ в \mathbb{B}_R^3 . Тогда $f = 0$ в \mathbb{B}_R^3 .

Приведём ещё одно утверждение, которое потребуется для доказательства основного утверждения.

Утверждение 4 (Следствие 8.2 из [7, Глава 1]). Пусть чётная функция $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$. Тогда существует $f \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$, что $\mathbf{R}f(\omega, d) = g(d)$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}^1$.

Построение решения задачи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим сначала случай $R \in (\sqrt{2}/2; \sqrt{2 - \sqrt{2}})$. Исходя из леммы 4 и замечания 1, для указанного R выполняется неравенство $\max_{12} < \min_{02}$. Для $j \in \{1; 2\}$ рассмотрим функции

$$g(d) = \begin{cases} 0, & 0 \leq |d| \leq \max_{12}; \\ e^{j/((|d| - \max_{12})(|d| - \min_{02}))}, & \max_{12} < |d| < \min_{02}; \\ 0, & |d| \geq \min_{02}. \end{cases}$$

Эти функции удовлетворяют условиям утверждения 4, поэтому существуют такие $f_j \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^2)$, что $\mathbf{R}f_j(\omega, d) = g_j(d)$ для всех $\omega \in \mathbb{S}^1$, $d \in \mathbb{R}^1$. Это означает, что интегралы от f_j по всем прямым, расстояние от которых до начала координат меньше \max_{12} или больше \min_{02} равны нулю. Так как f_j линейно независимы, то найдутся ненулевые C_j такие, что радиальная $f = C_1 f_1 + C_2 f_2$ имеет нулевой интеграл по \mathbb{B}_R^2 .

Исходя из Утверждения 2, $f(\rho) = 0$, если $\rho \geq \min_{02}$, причём не верно, что $f = 0$ п.в.

По определению величин $\max_{012} = \max_{12}$ и \min_{02} , для любого $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^n)$ плоскость α треугольника λT удалена от начала координат не дальше, чем на \max_{12} . Пусть круг $\mathbb{B}' = \alpha \cap \mathbb{B}_{\min_{02}}^n$, ζ_4 — его центр. Так как f — радиальна и $\int_{\mathbb{B}_{\min_{02}}^2} f dx = 0$, то $\int_{\mathbb{B}'} f dx = 0$. Пусть $\lambda' T$ — треугольник, симметричный λT относительно ζ_4 . Тогда возможны два случая. В первом пересечение $\lambda T \cap \lambda' T$ состоит из прямых, расстояние от которых до начала координат не превосходит \max_{12} , интегралы по которым от f равны нулю. В этом случае $\mathbb{B}' \subset \lambda T \cup \lambda' T$. А так как интегралы от f по этим треугольникам равны в силу симметрии, то интеграл от f по λT равен нулю. Во втором случае разность $\mathbb{B}' \setminus (\lambda T \cup \lambda' T)$ состоит из прямых, расстояние от которых до начала координат не превосходит \max_{12} , интегралы по которым от f равны нулю. Аналогично предыдущему случаю, интеграл от f по λT равен нулю. Построенный пример функции доказывает, что $\mathcal{R}_{2,n}(T) \geq \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Пусть теперь $R > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, радиальная $f: \mathbb{B}_R^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $f \in C(\mathbb{B}_R^3)$ и удовлетворяет (1) для любого $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R^3)$. Для $r \in (\sqrt{2 - \sqrt{2}}; R)$ рассмотрим $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$: $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{B}_{R-r}^3$. Тогда по лемме 1 функция $\tilde{f} = \varphi * f \in C^\infty(\mathbb{B}_r^3)$ и удовлетворяет (1) для любого $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_r^3)$, то есть $\tilde{f} \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_r^3)$. По лемме 6 существует ненулевой многочлен $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)\tilde{f} = 0$ в \mathbb{B}_r^3 . Отсюда по лемме 7 $\tilde{f} = 0$ в \mathbb{B}_r^3 , что означает $\mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_r^3) = \{0\}$. Применив следствие 1, получаем $\mathfrak{P}^\infty(T, \mathbb{B}_r^3) = \{0\}$. Устремив $r \rightarrow R - 0$, приходим к $f = 0$ в \mathbb{B}_R^3 , что означает $\mathcal{R}_{2,3}(T) \leq \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Рассмотрим произвольной точку $y \in \mathbb{B}_R^n$, где размерность $n \geq 4$ и $R > \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Сечение \mathbb{B}_R^n трёхмерной гиперплоскостью, проходящей через y и начало координат O , является, если там ввести свою систему координат, шаром \mathbb{B}_R^3 . Если некоторая функция имеет нулевые интегралы по треугольникам в \mathbb{B}_R^n , то и в полученном \mathbb{B}_R^3 , откуда, учитывая непрерывность f , из доказанного выше следует, что $f \equiv 0$ в \mathbb{B}_R^3 , значит и в точке y , откуда $\mathcal{R}_{2,n}(T) \leq \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машаров П. А. Радиус Помпейю для семейства из сектора и полукруга / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022. – № 2. – С. 77–88.
2. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183–190.

3. Benyamini Y. Harmonic analysis of spherical functions on $SV(1, 1)$ / Y. Benyamini, Y. Weit // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1992. – V. 42. – P. 671–694.
4. Agranovsky M. L. Fourier transform on $SL_2(\mathbb{R})$ and Morera type theorem / M. L. Agranovsky // Sovo Math. Dokl. – 1978. – V. 19. – P. 1522–1525.
5. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
6. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
7. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
8. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. – P. 185–194.
9. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
10. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
11. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser., 2013. – 592 p.
12. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12, № 1. – С. 51–79.
13. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства из треугольника и квадрата / П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко // Труды Института прикладной математики и механики. – 2020. – Т. 34. – С. 85–92.
14. Волчков В. В. Элементы нетрадиционной интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 9–52.
15. Машаров П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равносторонним треугольникам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 110–120.
16. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для квадрата в трёхмерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2017. – № 2. – С. 50–60.
17. Chang D. C. The Pompeiu problem for sets of higher codimension in Euclidean space and the Heisenberg group / D. C. Chang, W. Eby // Taiwanese Journal of Mathematics. – 2008. – V. 12. – P. 2619–2640.
18. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для куба в многомерном пространстве / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020. – № 2. – С. 92–103.

Поступила в редакцию 14.05.2025 г.

ON FUNCTIONS WITH ZERO SURFACE INTEGRALS OVER ISOSCELES RIGHT-ANGLED TRIANGLES

P. A. Masharov

The value of the smallest radius of the ball is obtained, in which the equality of integrals to zero implies vanishing of the function. Surface integrals over an isosceles right-angled triangles in a multidimensional space are considered.

Keywords: the Pompeiu problem, the extreme Pompeiu radius, the properties of functions with vanishing integrals by isosceles right-angled triangles, the local Pompeiu problem.

Машаров Павел Анатольевич

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений,
Донецкий государственный университет,
г. Донецк, РФ.
E-mail: pavelmasharov@gmail.com

Masharov Pavlo Anatoliyovych

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk State University, Donetsk, Russia.