

УДК 517.988.28

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ПРОБЛЕМЫ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

© 2023. П. А. Машаров, И. С. Власенко

В явном виде найдено значение наименьшего радиуса круга, в котором данное множество является множеством Помпейю. В качестве множества рассмотрен равнобедренный треугольник с углом $\pi/6$.

Ключевые слова: множество Помпейю, экстремальный вариант проблемы Помпейю, локальный вариант проблемы Помпейю, равнобедренный треугольник.

Введение

В работе рассматриваются вещественное евклидово пространство \mathbb{R}^n размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, группа $M(n)$ движений \mathbb{R}^n . Для компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ часть этой группы $\text{Mot}(K, D) = \{\lambda \in M(n) : \lambda K \subset D\}$, шар в \mathbb{R}^n радиуса R $B_R^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$.

Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю, если всякая локально суммируемая функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которой

$$\int_{\lambda K} f(x) dx = 0 \quad (1)$$

при всех $\lambda \in M(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств K . Данная проблема была хорошо изучена в первой половине прошлого века. Ряд достаточных условий принадлежности $K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ получены в прошлом веке (см. обзор литературы в [1]).

Отметим следующую теорему С. А. Вильямса [2], описывающую довольно широкий набор множеств Помпейю.

Пусть K — открытое ограниченное подмножество \mathbb{R}^n с липшицевой границей, гомотопной сфере, и связным дополнением. Тогда если его замыкание $\bar{K} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то граница K является вещественно-аналитическим подмногообразием в \mathbb{R}^n .

Из этого результата следует, что многие множества K с особенностями на границе (например, многогранники) принадлежат $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Примерами множеств $K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ с вещественно-аналитической границей для любого $n \geq 2$ являются эллипсоид, отличный от шара, замыкание внутренности тора и другие [3].

Есть также примеры множеств Помпейю, граница которых не обязательно липшицева. Одним из таких множеств является «снежинка Коха» [4].

Интересное обобщение проблемы Помпейю возникают в связи с интегрированием по семействам множеств, которые инвариантны только относительно вращений. Наиболее полная теория в этом направлении соответствует тому, что известно под названием локальной проблемы Помпейю. Одному из таких вариантов посвящена данная работа.

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

Постановка задачи

Пусть функция f локально суммируема в шаре \mathbb{B}_R^n , и равенство (1) выполняется при всех $\lambda \in \text{Mot}(K, \mathbb{B}_R^n)$. Если из этого следует, что $f = 0$ почти всюду в \mathbb{B}_R^n , будем говорить, что K является множеством Помпейю на шаре \mathbb{B}_R^n и обозначать $K \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$. Если $K \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, то для достаточно большого значения радиуса R (относительно размеров множества K) выполняется $K \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n)$ [5–7].

Рассмотрим величину

$$\mathcal{R}(K) = \inf \{ R > 0 : K \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R^n) \},$$

которую естественно называть экстремальным радиусом Помпейю для множества K .

В [7] поставлена следующая

Проблема 1. Для данного компактного $K \subset \mathbb{R}^n$ найти значение $\mathcal{R}(K)$.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(K)$, получены К. А. Беренштейном и Р. Гэем [5, 6], а также В. В. Волчковым [7, Глава 4, §1–2]. Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [7–15].

В данной работе проблема 1 решена для равнобедренного треугольника $T = \triangle ABC$ в \mathbb{R}^2 боковыми сторонами $AB = AC = 1$ и углом между ними $\angle BAC = \pi/6$. Всюду далее $\alpha_0 = \pi/12$. Таким образом (см. рис. 1),

$$T = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \cos \alpha_0, -x \operatorname{tg} \alpha_0 \leq y \leq x \operatorname{tg} \alpha_0 \}.$$

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\mathcal{R}(T) = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Вспомогательные обозначения и утверждения

Далее будем рассматривать пространство размерности $n = 2$, круг в нем будем обозначать $\mathbb{B}_R = \mathbb{B}_R^2$. Для $R > 0, r \in \mathbb{R}$ рассмотрим $\mathbb{B}(r, R) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : r < |x| < R \}$ — кольцо при $r \geq 0$, или круг \mathbb{B}_R , если $r < 0$.

Для $k \in \mathbb{N}$ и открытого непустого множества $D \subset \mathbb{R}^2$ под $C^k(D)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка k которых (включая смешанные) непрерывны в D , $C(D)$ — класс непрерывных на D функций, $C^\infty(D) = \bigcap_{k=1}^\infty C^k(D)$.

Под $\mathfrak{F}(K, D)$ будем понимать класс локально суммируемых в D функций, для которых равенство (1) верно для всех $\lambda \in \text{Mot}(K, D)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{F}^k(K, D) = \mathfrak{F}(K, D) \cap C^k(D)$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{F}^\infty(K, D) = \mathfrak{F}(K, D) \cap C^\infty(D)$; $\mathfrak{F}_0^\infty(K, \mathbb{B}_R^n)$ — класс радиальных функций из $\mathfrak{F}^\infty(K, \mathbb{B}_R^n)$, то есть таких, что для всех $x, y \in \mathbb{B}_R^n$, для которых $|x| = |y|$ выполняется $f(x) = f(y)$.

Для обозначения частных производных функции $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ по переменным x и y будем использовать выражения $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ соответственно. Символ Δ обозначает оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Для множества T найдем значение величины $r^*(K) = \inf \{ r > 0 : \text{Mot}(K, \mathbb{B}_r) \neq \emptyset \}$. Заметим, что указанная величина играет важную роль в локальном варианте проблемы Помпейю, поскольку для широкого класса множеств, включающего треугольники, имеет место оценка $\mathcal{R}(K) \leq 2r^*(K)$ [7].

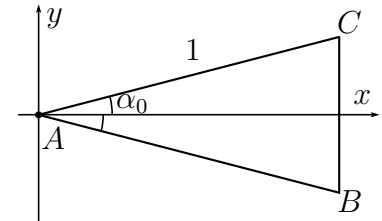


Рис. 1. Треугольник T

На рис. 2 изображен замкнутый круг минимального радиуса, содержащий $\triangle ABC$. Радиус этого круга $r^*(T)$ является радиусом описанной около треугольника окружности. Пусть O — центр окружности. В равнобедренном $\triangle AOC$ проведем высоту OJ , являющуюся медианой. Тогда из прямоугольного $\triangle AOJ$ найдем $r^*(T) = AO = AJ / \cos \angle OAJ = = (1/2) / \cos \alpha_0 = 1 / (2 \cos \alpha_0)$.

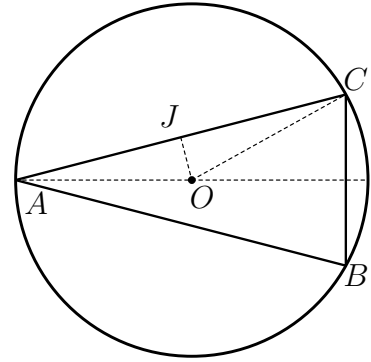


Рис. 2. Минимальный круг, содержащий T

Методами, которые далее будут использованы для доказательства основного результата, несложно установить, что $T \in \mathcal{P}(\mathbb{B}_R)$ для $R > 1$. Поэтому далее имеет смысл рассматривать T в круге \mathbb{B}_R радиуса $R < 1$.

Заметим, что если радиус круга \mathbb{B}_R мал настолько, что существует $r > 0$, что для любого $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$ имеет место включение $\mathbb{B}_r \subset \lambda T$, то несложно построить пример ненулевой функции из класса $\mathfrak{B}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$.

Наибольшим из таких радиусов будет тот минимальный, при котором два треугольника $\lambda_1 T, \lambda_2 T \subset \mathbb{B}_R$ и не имеют общих внутренних точек (см. рис. 3). Если O — центр такого круга, J — середина AC , то его радиус $R = AO = AJ / \cos \angle OAJ = 1 / (2 \cos 2\alpha_0) = \sqrt{3} / 3$. Поэтому нижнюю границу диапазона рассматриваемых значений R можно установить равной $\sqrt{3} / 3$. Таким образом, в дальнейших геометрических конструкциях будем рассматривать

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < R < 1. \tag{2}$$

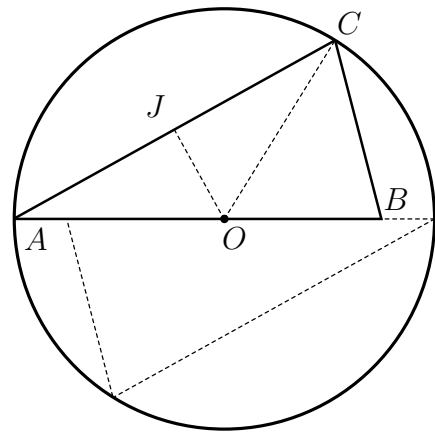


Рис. 3. Минимальный круг, половина которого содержит T

Рассмотрим дифференциальные операторы $\nu_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \text{tg } \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_3 = \frac{\partial}{\partial x} + \text{tg } \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_4 = \text{tg } \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_5 = \text{tg } \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, $\nu_6 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\nu_7 = \nu_1 \nu_2 \nu_3$, $\nu_8 = \nu_1 \nu_3 \nu_6$, $\nu_9 = \nu_1 \nu_2 \nu_4$. Заметим, что вершины треугольника T (см. рис. 1) имеют координаты $A(0, 0)$, $B(\cos \alpha_0, -\sin \alpha_0)$, $C(\cos \alpha_0, \sin \alpha_0)$, а для дифференциальных операторов выполняются равенства: $df(t, -t \text{tg } \alpha_0) = = (\frac{\partial f}{\partial x} - \text{tg } \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial y}) dt = \nu_1 f dt$, $df(\cos \alpha_0, t) = \frac{\partial f}{\partial y} dt = \nu_2 f dt$, $df(t, t \text{tg } \alpha_0) = = (\frac{\partial f}{\partial x} + \text{tg } \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial y}) dt = \nu_3 f dt$.

Лемма 1. Пусть $f \in C^3(T)$. Тогда имеют место равенства

$$\int_T \nu_8 f(x, y) dx dy = \int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} \Delta f(\cos \alpha_0, t) dt + 2 \text{tg } \alpha_0 \nu_6 f(A) - \nu_5 f(C) - \nu_4 f(B); \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \int_T \nu_9 f(x, y) dx dy &= 2 \text{tg } \alpha_0 \nu_6 f(A) - \nu_5 f(C) - \nu_4 f(B) + \\ &+ 2 \text{tg } \alpha_0 \int_0^{\cos \alpha_0} \Delta f(t, t \text{tg } \alpha_0) dt. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\int_T \nu f(x, y) dx dy = 2 \text{tg } \alpha_0 (\nu_2 f)(A) - (\nu_3 f)(B) + (\nu_1 f)(C). \tag{5}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведем двойной интеграл по T к повторному и расставим пределы интегрирования в обоих порядках:

$$\begin{aligned} \int_T f(x, y) dx dy &= \int_0^{\cos \alpha_0} dx \int_{-x \operatorname{tg} \alpha_0}^{x \operatorname{tg} \alpha_0} f(x, y) dy = \\ &= \int_{-\sin \alpha_0}^0 dy \int_{-y \operatorname{ctg} \alpha_0}^{\cos \alpha_0} f(x, y) dx + \int_0^{\sin \alpha_0} dy \int_{y \operatorname{ctg} \alpha_0}^{\cos \alpha_0} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

Применив оператор ν_1 к функции f , получим

$$\begin{aligned} \int_T \nu_1 f(x, y) dx dy &= \int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} (f(\cos \alpha_0, y) - f(|y| \operatorname{ctg} \alpha_0, y)) dy - \\ &\quad - \operatorname{tg} \alpha_0 \int_0^{\cos \alpha_0} (f(x, x \operatorname{tg} \alpha_0) - f(x, -\operatorname{tg} \alpha_0)) dx. \end{aligned}$$

Один из интегралов разобьем по свойству аддитивности и выполним в нем замены $t = \mp y \operatorname{ctg} \alpha_0$. Таким образом придем к равенству $-\int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} f(|y| \operatorname{ctg} \alpha_0, y) dy = \operatorname{tg} \alpha_0 \int_{\cos \alpha_0}^0 f(t, -t \operatorname{tg} \alpha_0) dt - \operatorname{tg} \alpha_0 \int_0^{\cos \alpha_0} f(t, t \operatorname{tg} \alpha_0) dt$.

В остальных случаях переменную интегрирования заменим на t . Значит

$$\int_T \nu_1 f(x, y) dx dy = \int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} f(\cos \alpha_0, t) dt - 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \int_0^{\cos \alpha_0} f(t, t \operatorname{tg} \alpha_0) dt. \quad (6)$$

Учитывая теперь формулу вычисления интеграла от полного дифференциала, получаем

$$\int_T \nu_1 \nu_3 f(x, y) dx dy = \int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} \nu_3 f(\cos \alpha_0, t) dt - 2 \operatorname{tg} \alpha_0 f(C) + 2 \operatorname{tg} \alpha_0 f(A). \quad (7)$$

Так как $\int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} \nu_2 f(\cos \alpha_0, t) dt = f(C) - f(B)$, то (7) можно переписать в виде

$$\int_T \nu_1 \nu_3 f(x, y) dx dy = \int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} \nu_6 f(\cos \alpha_0, t) dt - \operatorname{tg} \alpha_0 f(C) - \operatorname{tg} \alpha_0 f(B) + 2 \operatorname{tg} \alpha_0 f(A).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_T \nu_1 \nu_3 \nu_6 f(x, y) dx dy &= \int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} \nu_6^2 f(\cos \alpha_0, t) dt - \\ &\quad - \operatorname{tg} \alpha_0 (\nu_6 f(C) + \nu_6 f(B)) + 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \nu_6 f(A). \end{aligned}$$

Прибавляя к этому

$$0 = \int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} \nu_2^2 f(\cos \alpha_0, t) dt - \nu_2 f(C) + \nu_2 f(B),$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_T \nu_1 \nu_3 \nu_6 f(x, y) dx dy &= \int_{-\sin \alpha_0}^{\sin \alpha_0} \Delta f(\cos \alpha_0, t) dt - \operatorname{tg} \alpha_0 (\nu_6 f(C) + \nu_6 f(B)) + \\ &\quad + 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \nu_6 f(A) - \nu_2 f(C) + \nu_2 f(B), \end{aligned}$$

что означает (3).

Подставим в (7) $\nu_2 f$ вместо f и поменяем местами дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Получим

$$\int_T \nu_7 f(x, y) dx dy = \nu_3 f(C) - \nu_3 f(B) - 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \nu_2 f(C) + 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \nu_2 f(A),$$

что, с учетом $\nu_3 - 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \nu_2 = \nu_1$, дает (5).

Заменив теперь в (6) f на $\nu_2 f$, получим

$$\int_T \nu_1 \nu_2 f(x, y) dx dy = f(C) - f(B) - 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \int_0^{\cos \alpha_0} \nu_2 f(t, t \operatorname{tg} \alpha_0) dt. \quad (8)$$

Из $\int_0^{\cos \alpha_0} \nu_3 f(t, t \operatorname{tg} \alpha_0) dt = f(C) - f(A)$ с учетом определения ν_3 получаем $\operatorname{tg} \alpha_0 \int_0^{\cos \alpha_0} \nu_2 f(t, t \operatorname{tg} \alpha_0) dt = f(C) - f(A) - \int_0^{\cos \alpha_0} \nu_6 f(t, t \operatorname{tg} \alpha_0) dt$. Значит (8) можно записать в виде

$$\int_T \nu_1 \nu_2 f(x, y) dx dy = 2f(A) - f(C) - f(B) + 2 \int_0^{\cos \alpha_0} \nu_6 f(t, t \operatorname{tg} \alpha_0) dt. \quad (9)$$

Заменим теперь в (8) f на $\nu_2 f$, в (8) f на $\nu_6 f$ и домножим на $\operatorname{tg} \alpha_0$. После этого вычтем из полученных второго первое равенство. Получим

$$\begin{aligned} \int_T \nu_1 \nu_2 \left(\operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) dx dy = 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x}(A) - \left(\operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)(C) - \\ - \left(\operatorname{tg} \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right)(B) + 2 \operatorname{tg} \alpha_0 \int_0^{\cos \alpha_0} \Delta f(t, t \operatorname{tg} \alpha_0) dt, \end{aligned}$$

что означает (4) □

Доказательство следующей леммы можно найти в [1].

Лемма 2. Пусть K — компакт в \mathbb{R}^2 , \mathfrak{d} — один из дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$, и для некоторого открытого множества D , для которого $\operatorname{Mot}(K, D) \neq \emptyset$, выполнено $f \in \mathfrak{F}^\infty(K, D)$. Тогда $\mathfrak{d}f \in \mathfrak{F}^\infty(K, D)$.

Учитывая, что все ν_j ($j = \overline{1, 9}$) являются линейными комбинациями операторов дифференцирования по x и y или произведениями других из них, получаем

Следствие 1. Пусть K — компакт в \mathbb{R}^2 , и для некоторого открытого множества D , для которого $\operatorname{Mot}(K, D) \neq \emptyset$, выполнено $f \in \mathfrak{F}^\infty(K, D)$. Тогда для любого $j = \overline{1, 9}$ имеет место $\nu_j f \in \mathfrak{F}^\infty(K, D)$.

Пусть $\rho(e) = \rho(O, \lambda e) = \inf\{\|O\vec{X}\| : X \in e\}$ — расстояние от центра круга, точки $O(0, 0)$, до элемента λe треугольника λT (вершины или стороны) при фиксированном $\lambda \in \operatorname{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$. В зависимости от значения R , удовлетворяющего (2), рассмотрим интересующие нас максимальные и минимальные возможные расстояния до соответствующих элементов по всем $\lambda \in \operatorname{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$:

$$\begin{aligned} \max(A) &= \sup\{\rho(A)\}, & \max(C) &= \sup\{\rho(C)\}, & \max(AB) &= \sup\{\rho(AB)\}, \\ \max(BC) &= \sup\{\rho(BC)\}, & \min(A) &= \inf\{\rho(A)\}, & \min(C) &= \inf\{\rho(C)\}, \\ \min(AB) &= \inf\{\rho(AB)\}, & \min(BC) &= \inf\{\rho(BC)\}. \end{aligned}$$

Заметим, что исходя из соображений симметрии, вместо вершины C можно рассматривать B , а вместо боковой стороны AB — сторону AC .

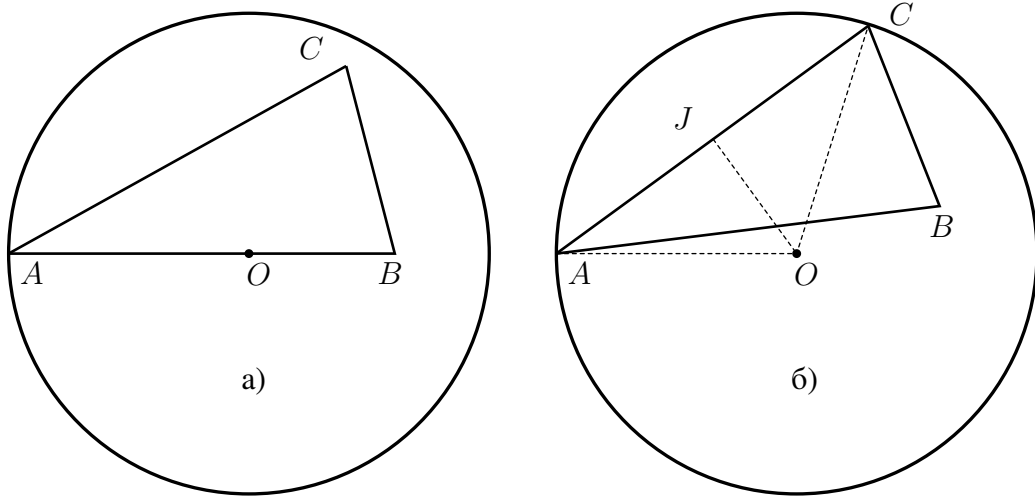


Рис. 4. Расположения λT в \mathbb{B}_R

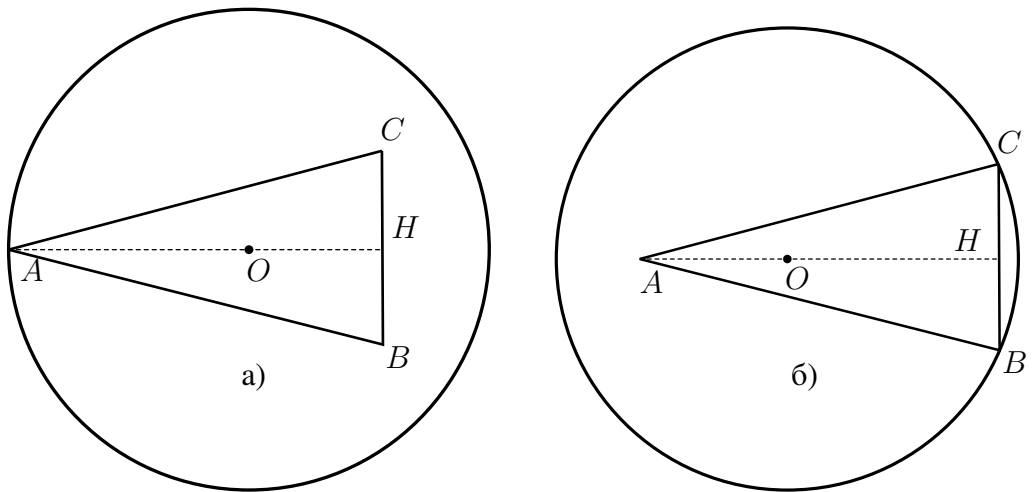


Рис. 5. Расположения λT в \mathbb{B}_R

Рассмотрим крайние расположения λT в \mathbb{B}_R при условии (2): на рис. 4, 5, вершины треугольника лежат на границе круга, на рис. а) центр круга $O(0; 0)$ лежит на стороне AB или высоте треугольника AH соответственно. Из рис. 4 б) видно, что $\max(A) = \max(C) = R$. Из рис. 4 а) получаем $\min(C) = OB = 1 - OA = 1 - R$ и $\min(AB) = 0$. Из рис. 5 а) находим $\min(BC) = OH = AH - AO = \cos \alpha_0 - R$, если $R < \cos \alpha_0$. Если $R \geq \cos \alpha_0$, то можно сдвинуть T так, чтобы центр окружности оказался на стороне BC .

$$\text{Значит } \min(BC) = \begin{cases} \cos \alpha_0 - R, & \text{если } R < \cos \alpha_0; \\ 0, & \text{если } R \geq \cos \alpha_0. \end{cases}$$

Если OJ — высота равнобедренного $\triangle AOC$ на рис. 4 б), то $\max(AB) = OJ = \sqrt{AO^2 - AJ^2} = \sqrt{R^2 - (1/4)}$.

Из рис. 5 б) находим $\max(BC) = OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha_0}$ и $\min(A) = OA = AH - OH = \cos \alpha_0 - \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha_0}$.

Собрав вместе результаты геометрических рассуждений, получаем

Лемма 3. При выполнении (2) имеют место равенства

$$\begin{aligned}\max(A) &= \max(C) = R, & \max(AB) &= \sqrt{R^2 - (1/4)}, \\ \max(BC) &= \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha_0}, & \min(A) &= \cos \alpha_0 - \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha_0}, \\ \min(C) &= 1 - R, & \min(AB) &= 0, & \min(BC) &= \max\{\cos \alpha_0 - R; 0\}.\end{aligned}$$

Лемма 4 ($\min(C) < \min(A)$). Если R удовлетворяет (2), то

$$1 - R < \cos \alpha_0 - \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполним эквивалентные преобразования необходимого неравенства: $\sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha_0} < \cos \alpha_0 + R - 1$. Так как $\cos \alpha_0 \approx 0,966$, $\sqrt{3}/3 \approx 0,577$, то обе части неотрицательны. Возведем их в квадрат и преобразуем:

$$R^2 - \sin^2 \alpha_0 < \cos^2 \alpha_0 + R^2 + 1 + 2R \cos \alpha_0 - 2 \cos \alpha_0 - 2R;$$

$2 + 2R \cos \alpha_0 - 2 \cos \alpha_0 - 2R > 0$. Разложим на множители и получим верное неравенство $(1 - \cos \alpha_0)(1 - R) > 0$, что доказывает лемму. \square

Лемма 5 ($\min(C) < \max(BC)$). Если R удовлетворяет (2), то

$$1 - R < \sqrt{R^2 - \sin^2 \alpha_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как обе части неотрицательны, возведем их в квадрат и преобразуем: $1 - 2R + R^2 < R^2 - \sin^2 \alpha_0$; $R > (1 + \sin^2 \alpha_0)/2$. Так как

$$\frac{1 + \sin^2 \alpha_0}{2} = \frac{1 + \frac{1 - (\sqrt{3}/2)}{2}}{2} = \frac{6 - \sqrt{3}}{8} < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

то из (2) следует необходимое неравенство. \square

Лемма 6 ($\min(BC) < \max(AB)$). Если R удовлетворяет (2), то решением неравенства

$$\max\{\cos \alpha_0 - R; 0\} < \sqrt{R^2 - (1/4)}$$

является $\sqrt{6}/4 < R < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $R > \cos \alpha_0$, то, учитывая $\sqrt{R^2 - (1/4)} > 0$, необходимое неравенство тривиально.

Для $R \leq \cos \alpha_0$ возведем обе части в квадрат. Они неотрицательны, поэтому это преобразование является эквивалентным. Получим $\cos^2 \alpha_0 - 2R \cos \alpha_0 + R^2 < R^2 - \frac{1}{4}$; $2R \cos \alpha_0 > (1/4) + \cos^2 \alpha_0$; $R > ((1/4) + \cos^2 \alpha_0)/(2 \cos \alpha_0)$. Преобразуем правую часть полученного решения. Так как $\alpha_0 = \pi/12$, то $\cos \alpha_0 = \sqrt{(1 + (\sqrt{3}/2))/2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}/2$. Отсюда

$$\begin{aligned}\frac{(1/4) + \cos^2 \alpha_0}{2 \cos \alpha_0} &= \frac{1 + 4 \cos^2 \alpha_0}{8 \cos \alpha_0} = \frac{1 + 2 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{4\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \\ &= \frac{\sqrt{3}(1 + 2\sqrt{3} + 3)}{4\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}(2 + \sqrt{3})}{4\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{4},\end{aligned}$$

что с учетом (2) означает требуемое утверждение. \square

Перед формулировкой необходимого в дальнейшем утверждения, доказательство которого можно найти в [7], введем используемые в нём обозначения. Для набора точек $\{v_\nu\}_{\nu=1}^k \subset \mathbb{R}^n$, где $v_i \neq v_j$ для $1 \leq i, j \leq k$, $i \neq j$, числа $\varepsilon > 0$ положим $\Omega_{\nu,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : |v_\nu| - \varepsilon < |x| < |v_\nu| + \varepsilon\}$, $\nu = 1, \dots, k$. Для открытого непустого множества $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ под $\mathfrak{H}_0(\mathcal{U})$ понимается класс радиальных локально суммируемых в \mathcal{U} распределений, $\vec{\partial} = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$.

Утверждение 1. (Теорема 3.2 из [7]) Пусть $F_\nu \in \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu,\varepsilon})$ для $\nu = 1, \dots, k$ и существуют многочлены $P_\nu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ такие, что для любого $x \in \mathbb{B}_\varepsilon^n$ выполняется $\sum_{\nu=1}^k (P_\nu(\vec{\partial})F_\nu)(x + v_\nu) = 0$, которое понимается в смысле распределений. Тогда существует нетривиальный многочлен $P: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $P(\Delta)F_\nu = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$.

Лемма 7. Пусть (2), и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $q(\Delta)f = 0$ в $\mathbb{B}(1 - R, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя утверждение 1 к функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) \subset \mathfrak{H}_0(\Omega_{\nu,\varepsilon})$ для вершин A, B, C треугольника T , учитывая (5) из леммы 1 (по следствию 1 его левая часть в данном случае обращается в нуль), приходим к существованию нетривиального многочлена $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, для которого $q(\Delta)f = 0$ в $\Omega_{\nu,\varepsilon}$. Последнее множество представляет из себя набор точек из \mathbb{B}_R , в которых могут оказаться вершины λC и λA при $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$. Применяя леммы 4 и 3, приходим к утверждению леммы. \square

Лемма 8. Пусть $R > \sqrt{6}/4$, и $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$. Тогда существует ненулевой многочлен $\tilde{q}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $\tilde{q}(\Delta)f = 0$ в \mathbb{B}_R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая леммы 5 и 6, для указанных в условии леммы значений R выполняются оба неравенства: $\min(C) < \max(BC)$, $\min(BC) < \max(AB)$.

Рассмотрим многочлен q из леммы 7 и функцию $F = q(\Delta)f$. По следствию 1, учитывая, что оператор Лапласа оставляет функцию радиальной, получаем $F \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$. При этом $F = 0$ в $\mathbb{B}(1 - R, R)$. Доопределим F нулём вне \mathbb{B}_R .

Заменяя в (3) f на F , а T на λT для различных $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$, учитывая равенство нулю интегралов по треугольникам и равенство нулю функции F вне замыкания $\overline{\mathbb{B}_{1-R}}$, получаем, что интегралы от ΔF по сторонам λBC , а значит и по всем прямым, их содержащим, равны нулю. То есть преобразование Радона по всем прямым, расстояние до которых от начала координат больше $\min(BC)$, равно нулю. Отсюда (см., например, лемму 1.8.3 из [7]) следует $\Delta F = 0$ в $\mathbb{B}(\min(BC), R)$. Аналогичными рассуждениями на основе формулы (4) получаем $\Delta^2 F = 0$ в $\mathbb{B}(\min(AB), R)$. По лемме 3, $\min(AB) = 0$. Произведение $\tilde{q} = \Delta^2 q(\Delta)$ также является многочленом от Δ . Таким образом, утверждение леммы получено. \square

Приведем также два утверждения, доказательства которых полностью аналогичны леммам 7 и 8 из [16].

Лемма 9. Пусть $\mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R) = \{0\}$ для некоторого $R > \sqrt{6}/4$. Тогда $\mathcal{R}(T) \leq R$.

Лемма 10. Пусть $R > \sqrt{6}/4$, для некоторой функции $f \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$ и для некоторого многочлена $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ выполняется $q(\Delta)f = 0$ в \mathbb{B}_R . Тогда $f = 0$ в \mathbb{B}_R .

Доказательство основного результата

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Если $0 < R \leq r^*(T)$, то $\text{Mot}(T, \mathbb{B}_R) = \emptyset$ и тогда выполнение (1) для $K = T$ при всех $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$ не накладывает никаких условий на функцию f .

Если $1/(2 \cos \alpha_0) < R \leq \sqrt{3}/3$, то для

$$r = R \sin\left(\frac{\pi}{6} - \arccos \frac{1}{2R}\right)$$

выполняется условие $\mathbb{B}_r \subset \lambda T$ для всех $\lambda \in \text{Mot}(T, \mathbb{B}_R)$ (на рис. 6 O — центр круга радиуса R , $OJ \perp AC$, $OH \perp AB$; $AJ/OA = 1/(2R) = \cos \angle OAJ$; $r = OH = OA \sin \angle OAH$).

В этом случае для $j \in \{1; 2\}$ рассмотрим функции

$$g_j(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho = 0 \text{ или } \rho \geq r; \\ \exp\left(\frac{j}{\rho(\rho-r)}\right), & \text{если } 0 < \rho < r, \end{cases}$$

и величины $C_j = \int_{\mathbb{B}_r} g_j(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$. Так как функции $g_j \in C^\infty(0; +\infty)$ и линейно независимы, то их линейная комбинация $f(\rho) = C_2 g_1(\rho) - C_1 g_2(\rho) \in \mathfrak{P}_0^\infty(T, \mathbb{B}_R)$, где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, и не равна нулю тождественно.

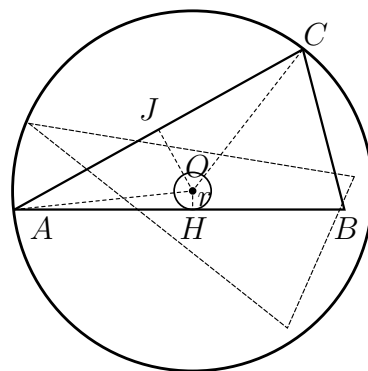


Рис. 6. Круг, содержащийся во всех λT

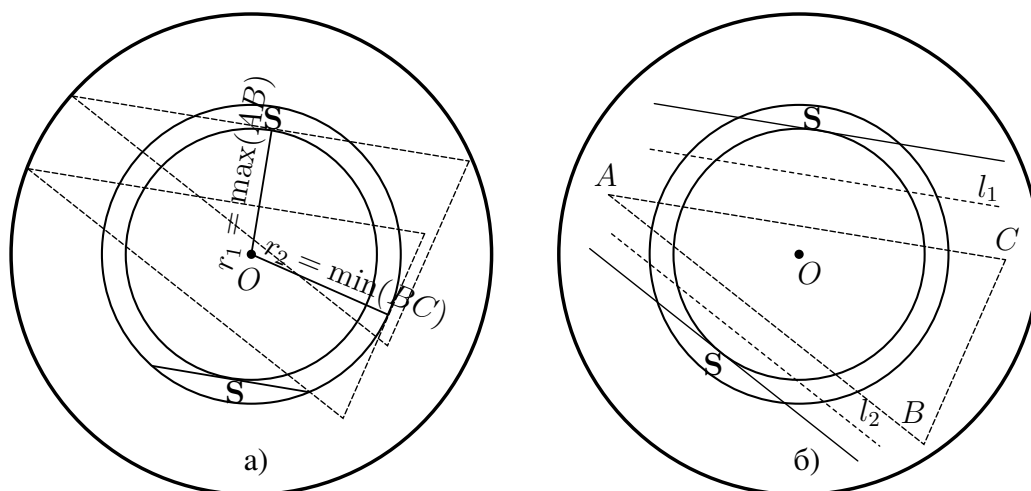


Рис. 7. Расположения λT в \mathbb{B}_R

Рассмотрим теперь $\sqrt{3}/3 \geq R < \sqrt{6}/4$. Для таких значений R выполняется неравенство $r_1 = \max(AB) < r_2 = \min(BC)$ (см. рис. 7 а)). Для $j \in \{1, 2\}$ рассмотрим функции

$$g_j(d) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq d \leq r_1 \text{ или } d \geq r_2; \\ \exp\left(\frac{j}{(d-r_1)(d-r_2)}\right), & \text{если } r_1 < d < r_2. \end{cases}$$

Тогда существуют такие радиальные функции $f_j \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, что их преобразования Радона по прямым $\mathbf{R}f_j(\omega, d)$ совпадают с $g_j(d)$ для всех $|\omega| = 1$ и $d \geq 0$ (см., например, [7, Глава 1]). Эти функции линейно независимы, поэтому существует такой ненулевой набор чисел $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, что линейная комбинация $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ радиальная, не равна нулю тождественно и обладает следующими свойствами. Она имеет нулевые интегралы по всем прямым, расстояние до начала координат от которых лежит в пределах от 0 до r_1 , интеграл равный нулю по любому сегменту S круга радиуса r_2 с расстоянием до хорды равном r_1 (см. рис. 7), равна нулю во внешности \mathbb{B}_{r_2} . Круг \mathbb{B}_{r_2} состоит из двух сегментов S и пучка

отрезков указанных прямых, значит по свойству аддитивности функция f имеет нулевой интеграл по \mathbb{B}_{r_2} . Кроме того, функция f вне этого круга равна нулю.

Рассмотрим произвольный $\lambda T \subset \mathbb{B}_R$ (см. рис. 7 б)). Круг \mathbb{B}_{r_2} можно представить в виде объединения множеств, не имеющих общих внутренних точек: двух сегментов S , кругового слоя, не содержащего O , из отрезков прямых типа $l_1 \parallel AC$ от AC до S , аналогичного слоя из отрезков $l_2 \parallel AB$, части $\lambda T \cap \mathbb{B}_{r_2}$. Исходя из свойств функции f интеграл по пересечению равен нулю. А весь треугольник λT состоит из пересечения и остатка $\lambda T \setminus \mathbb{B}_{r_2}$, находящегося в области нулей f .

Построенная ненулевая функция с нулевыми интегралами по $\lambda T \subset \mathbb{B}_R$ доказывает оценку $\mathcal{R}(T) \geq \sqrt{6}/4$.

Если $R > \sqrt{6}/4$, то, используя леммы 8, 10, 9, получаем оценку $\mathcal{R}(T) \leq \sqrt{6}/4$, откуда следует утверждение теоремы. \square

Выводы

В работе в явном виде получено точное значение величины $\mathcal{R}(T) = \sqrt{6}/4$. Известная ранее оценка давала $\mathcal{R}(T) \leq 1/\cos(\pi/12)$. Учитывая приближенные значения $\sqrt{6}/4 \approx 0,612$ и $1/\cos(\pi/12) \approx 1,035$, видим, что в работе получено существенное уточнение этой величины.

Решение локального варианта проблемы Помпейю применяется в комплексном анализе, теории аппроксимации, теории отображений, сохраняющих меру [7, 16], при нахождении экстремального радиуса Помпейю для совокупности множеств [1, 13], а также при изучении вопроса равенства нулю функции с нулевыми интегралами по множествам положительной коразмерности [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машаров П. А. Радиус Помпейю для семейства из сектора и полукруга / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022. – № 2. – С. 77–88.
2. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem / S. A. Williams // Math. Ann. – 1976. – V. 223. – P. 183–190.
3. Dalmasso R. A new result on the Pompeiu problem / R. Dalmasso // Trans. Amer. Math. Soc. – 2000. – V. 352. – P. 2723–2736.
4. Volchkov V. V. New results in integral geometry / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 417–432.
5. Berenstein C. A. Le probleme de Pompeiu locale / C. A. Berenstein // J. Anal. Math. – 1989. – V. 52. – P. 133–166.
6. Berenstein C. A. A local version of the two-circles theorem / C. A. Berenstein // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
7. Volchkov V. V. Integral Geometry and Convolution Equations / V. V. Volchkov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
8. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem. Approximation by solutions of partial differential equations / L. Zalcman; ed. B. Fuglede et al., 1992. – P. 185–194.
9. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography / L. Zalcman // Contemp. Math. – 2001. – № 278. – P. 69–74.
10. Volchkov V. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – London: Springer, 2009. – 671 p.
11. Volchkov V. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces / V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov. – New York: Birkhäuser. – 2013. – 592 p.
12. Волчков В. В. Экстремальные задачи интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Математика сегодня. – 2001. – Вып. 12., № 1. – С. 51–79.
13. Машаров П. А. Локальный вариант проблемы Помпейю для семейства из треугольника и квадрата / П. А. Машаров, Е. А. Рыбенко // Труды Института прикладной математики и механики. – 2020. – Т. 34. – С. 85–92.

14. Волчков В. В. Элементы нетрадиционной интегральной геометрии / В. В. Волчков, Вит. В. Волчков // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 9–52.
15. Машаров П. А. О функциях с нулевыми поверхностными интегралами по равносторонним треугольникам / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2021. – № 2. – С. 110–120.
16. Машаров П. А. Радиус Помпейю для неодносвязного множества / П. А. Машаров // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2016. – № 1. – С. 87–97.

Поступила в редакцию 10.08.2023 г.

THE EXTREME VERSION OF POMPEIU’S PROBLEM FOR AN ISOSCELES TRIANGLE

P. A. Masharov, I. S. Vlasenko

The value of the smallest circle radius in which the given set is a Pompeiu set is found explicitly. The isosceles triangle with an angle $\pi/6$ is considered.

Keywords: the Pompeii set, the extreme version of the Pompeii problem, the local variant of Pompeiu’s problem, the isosceles triangle.

Машаров Павел Анатольевич

кандидат физико-математических наук
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
pavelmasharov@gmail.com
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонНУ,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Masharov Pavlo Anatoliyovich

Candidate of Physico-Mathematical Sciences,
Donetsk State University, Donetsk, Russia

Власенко Илона Сергеевна

магистрант ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия

Vlasenko Iona Sergeevna

Graduate student, Donetsk State University, Donetsk, Russia