УДК 517.983.36

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ШКАЛЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

© 2023. *Д. В. Лиманский*

Получен критерий ε-слабой коэрцитивности в шкале анизотропных пространств Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, для системы минимальных дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ с l-квазиоднородными главными частями, коэффициенты которых постоянны, $P^l_j(x, D) = P^l_j(D)$.

***Ключевые слова*:** априорная оценка, дифференциальный оператор, ε-слабая коэрцитивность, пространство Соболева, формула Лейбница.

§ 1. Введение.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $l := (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $p \in [1, \infty]$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов вида

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{1}$$

с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Здесь и в дальнейшем используются обозначения: $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, $\xi := (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$; $D := (D_1, \ldots, D_n)$, $D_j := -i(\partial/\partial x^j)$, $j \in \{1, \ldots, N\}$; $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \cdots + \alpha_n/l_n$, $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$.

Пусть также

$$P^l_j(x, D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha \qquad \text{и} \qquad P^l_j(x, \xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)\, \xi^\alpha$$

— соответственно главная часть и главный символ оператора $P_j(x, D)$, $j \in \{1, \ldots, N\}$.

Напомним следующие определения.

Определение 1. [1–3] Система дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1) называется **l-квазиэллиптической**, если

$$(P^l_1(x, \xi), \ldots, P^l_N(x, \xi)) \neq 0, \qquad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

В частности, в изотропном случае, т. е. при $l_1 = \cdots = l_n = l$, система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ называется **эллиптической порядка** l.

Определение 2. [1, 3] Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (1) называют **коэрцитивной** в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{W^l_p(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D) f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2}$$

в которой положительные константы C_1 и C_2 не зависят от $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

Хорошо известно [1, 2, 4, 5], что критерием коэрцитивности системы операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) в анизотропных пространствах Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$ при $p\in(1,\infty)$ и некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω является ее l-квазиэллиптичность. При $p=1$ и $p=\infty$ оценка (2) для l-квазиэллиптической системы $\{P_j(x,D)\}_1^N$ утрачивает силу, т. е. l-квазиэллиптическая система (1) является коэрцитивной в $W^l_{1,0}(\Omega)$ и $W^l_{\infty,0}(\Omega)$ в исключительных случаях (см. [3, 6, 7]). Тем не менее для нее справедлива более слабая оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1}\|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}\leqslant C_1\sum_{j=1}^N\|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)}+C_2\|f\|_{L^p(\Omega)},\qquad f\in C_0^\infty(\Omega),\tag{3}$$

при $p\in(1,\infty)$ вытекающая из доказанной в [1, 4] (см. также [2]) оценки (2), а при $p=\infty$ доказанная в [7].

Эти результаты делают естественным следующее введенное в [3] определение.

Определение 3. [3] Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) называют **слабо коэрцитивной** в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если для нее справедлива априорная оценка (3), в которой положительные константы C_1 и C_2 не зависят от $f\in C_0^\infty(\Omega)$.

В случае изотропного пространства Соболева $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, т. е. при $l_1=\dots=l_n=l$, неравенство $|\alpha:l|<1$ в (3) принимает обычный вид: $|\alpha|<l$.

Для случая $N=1$ де Лю и Миркил [8] показали, что при $n\geqslant 3$ оператор $P(D):=P_1(D)$ с постоянными коэффициентами эллиптичен в точности тогда, когда он слабо коэрцитивен в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.

В «анизотропном» случае в связи с критерием де Лю и Миркила ставится вопрос о возможности охарактеризовать l-квазиэллиптические системы при помощи априорных оценок вида (3) в $W^l_{p,0}(\Omega)$ при всех $p\in[1,\infty]$. В работе автора [9] рассматривался случай одного оператора $P(D_1,D_2)$ с постоянными коэффициентами от двух переменных с l-квазиоднородной главной частью, $l=(l_1,l_2)$, $l_1>l_2$, для которого был доказан аналог теоремы де Лю и Миркила в случае, когда l_1 не делится на l_2. Далее, в работах [10, 11] результаты де Лю и Миркила были распространены на случай системы операторов $\{P_j(D)\}_1^N$ с постоянными коэффициентами в анизотропных пространствах Соболева $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ при некоторых дополнительных ограничениях на компоненты вектора $l=(l_1,\dots,l_n)$ и операторы $P_j(D)$.

Введем следующее определение.

Определение 4. Систему операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1) будем называть ε**-слабо коэрцитивной** в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется константа $C_\varepsilon>0$ такая, что справедлива априорная оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1}\|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}\leqslant \varepsilon\sum_{j=1}^N\|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)}+C_\varepsilon\|f\|_{L^p(\Omega)},\qquad f\in C_0^\infty(\Omega).\tag{4}$$

М.М. Маламудом в [7] (см. также [1, 3]) показано, что l-квазиэллиптическая система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1), для которой $a_{j\alpha}(\cdot)\in C(\Omega)$ при $|\alpha:l|=1$ и $a_{j\alpha}(\cdot)\in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha:l|<1$, является ε-слабо коэрцитивной в $W^l_{p,0}(\Omega)$ для всех $p\in[1,\infty]$.

В следующей теореме — основном результате данной работы — мы показываем, что при каждом $p\in[1,\infty]$ неравенство (4) характеризует l-квазиэллиптические системы в классе всех ε-слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\Omega)$ систем с постоянными коэффициентами в их главных частях.

Теорема 1. *Пусть* $l=(l_1,\dots,l_n)\in\mathbb{N}^n$, Ω *— область в* $\mathbb{R}^n$ *и* $\{P_j(x,D)\}_1^N$ *— система операторов вида* (1)*, главные части которых имеют постоянные коэффициенты, т. е.* $P^l_j(x,D)=P^l_j(D)$*, и* $a_{j\alpha}(\cdot)\in L^\infty(\Omega)$ *при* $|\alpha:l|<1,\ \ j\in\{1,\dots,N\}$.

Тогда система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ l*-квазиэллиптична в точности тогда, когда она* ε*-слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве Соболева* $W^l_{p,0}(\Omega)$ *при* $p\in[1,\infty]$.

Отметим, что аналог теоремы 1 для «изотропного» случая (при $l_1=\dots=l_n=l$) был доказан в [3].

§ 2. Обозначения. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ — множества соответственно натуральных, целых, вещественных и комплексных чисел; $\mathbb{Z}_+:=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{Z}^n_+:=\mathbb{Z}_+\times\dots\times\mathbb{Z}_+$ (n сомножителей). Далее, $D_k:=-i\partial/\partial x_k$, $D=(D_1,\dots,D_n)$; для мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_+$ положим $|\alpha|:=\sum_{k=1}^n\alpha_k$, $|\alpha:l|:=\alpha_1/l_1+\dots+\alpha_n/l_n$, $D^\alpha:=D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$ и $\xi^\alpha:=\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}$, где $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ и $l=(l_1,\dots,l_n)\in\mathbb{N}^n$. Кроме того, пусть $\langle x,y\rangle:=\sum_1^n x_k y_k$ для $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$.

Далее, для чисел $l_k\in\mathbb{N}$, $k\in\{1,\dots,n\}$ обозначим через d их наименьшее общее кратное; $m_k:=d/l_k$, $k\in\{1,\dots,n\}$; $m:=(m_1,\dots,m_n)$. Для мультииндекса $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ положим $\alpha!:=\alpha_1!\dots\alpha_n!$. Если для мультииндексов $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ выполнено $\alpha_k\leqslant\beta_k$ для всех $k\in\{1,\dots,n\}$, то будем писать $\alpha\leqslant\beta$ и полагать $\beta-\alpha:=(\beta_1-\alpha_1,\dots,\beta_n-\alpha_n)$, $C^\alpha_\beta:=\dfrac{\beta!}{(\beta-\alpha)!\,\alpha!}=\prod_{k=1}^n\dbinom{\beta_k}{\alpha_k}$, где $\dbinom{\beta_k}{\alpha_k}:=\dfrac{\beta_k!}{(\beta_k-\alpha_k)!\,\alpha_k!}$, $k\in\{1,\dots,n\}$ — классические биномиальные коэффициенты. Пусть также $\xi^t:=(t^{m_1}\xi_1,\dots,t^{m_n}\xi_n)$ для $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ и $t>0$.

Для дифференциального оператора $P(x,D)=\sum_{|\alpha:l|\leqslant1}a_\alpha(x)D^\alpha$ обозначим через $P(x,\xi)=\sum_{|\alpha:l|\leqslant1}a_\alpha(x)\xi^\alpha$ его символ, через $P^l(x,\xi)=\sum_{|\alpha:l|=1}a_\alpha(x)\xi^\alpha$ — его главный l-квазиоднородный символ, а через $P^{(\alpha)}(x,D)$ — оператор с символом $D^\alpha_\xi P(x,\xi)$.

Через $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ обозначим пространство функций, локально ограниченных п. в. в области Ω. Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных в Ω бесконечно дифференцируемых функций в норме $\|f\|_{W^l_p(\Omega)}:=\sum_{|\alpha:l|\leqslant1}\|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$ пространства Соболева $W^l_p(\Omega)$ обозначается через $W^l_{p,0}(\Omega)$.

§ 3. Формула Лейбница. Докажем, что для произвольного дифференциального полинома $P(D)$ справедливо следующее обобщение формулы дифференцирования произведения двух функций:

$$P(D)[uv]=\sum_\alpha P^{(\alpha)}(D)u\cdot\frac{D^\alpha v}{\alpha!}\,,\qquad u,v\in C^\infty(\Omega).\tag{5}$$

Формула (5), так же, как и ее аналог для случая функций одной переменной, называется **формулой Лейбница** (см. [5]).

Так как оператор $P(D)$ — линейная комбинация дифференциальных мономов, то достаточно доказать формулу (5) для случая $P(D)=D^\beta$. Замечая, что при $\alpha\leqslant\beta$

$$D^\alpha\xi^\beta=\frac{\beta!}{(\beta-\alpha)!}\,\xi^{\beta-\alpha}=\alpha!\,C^\alpha_\beta\,\xi^{\beta-\alpha},$$

получим, что при $P(\xi) = \xi^\beta$ формула (5) примет вид:

$$D^\beta[uv] = \sum_{\alpha\leqslant\beta} C_\beta^\alpha\, D^{\beta-\alpha}u \cdot D^\alpha v = \sum_{\alpha+\alpha'=\beta} C_\beta^\alpha\, D^{\alpha'}u \cdot D^\alpha v. \tag{6}$$

Докажем формулу (6) индукцией по порядку $|\beta|$. При $|\beta| = 1$ она принимает привычный вид $D_k[uv] = uD_kv + vD_ku$ при некотором $k \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть она справедлива для всех мультииндексов β и γ порядков, меньших некоторого числа. Тогда для мультииндекса $\beta + \gamma$ требуется показать, что

$$D^{\beta+\gamma}[uv] = \sum_{\varkappa+\varkappa'=\beta+\gamma} C_{\beta+\gamma}^\varkappa\, D^{\varkappa'}u \cdot D^\varkappa v. \tag{7}$$

Согласно предположению индукции и формуле (6), имеем:

$$D^{\beta+\gamma}[uv] = \sum_{\alpha+\alpha'=\beta} C_\beta^\alpha D^\gamma\left[D^{\alpha'}u \cdot D^\alpha v\right] = \sum_{\alpha+\alpha'=\beta}\ \sum_{\delta+\delta'=\gamma} C_\beta^\alpha C_\gamma^\delta\, D^{\alpha'+\delta'}u \cdot D^{\alpha+\delta}v. \tag{8}$$

Сравнивая формулы (7) и (8), приходим к выводу, что они совпадут, если выполнено тождество

$$\sum_{\alpha+\delta=\varkappa} C_\beta^\alpha C_\gamma^\delta = C_{\beta+\gamma}^\varkappa. \tag{9}$$

Но тождество (9) вытекает из соответствующего хорошо известного скалярного тождества (для классических биномиальных коэффициентов), см. [12]. В самом деле,

$$\sum_{\alpha+\delta=\varkappa} C_\beta^\alpha C_\gamma^\delta = \sum_{\substack{\alpha_k+\delta_k=\varkappa_k\\ k\in\{1,\ldots,n\}}} \prod_{k=1}^n \binom{\beta_k}{\alpha_k}\binom{\gamma_k}{\delta_k} = \prod_{k=1}^n \sum_{\substack{\alpha_k+\delta_k=\varkappa_k\\ k\in\{1,\ldots,n\}}} \binom{\beta_k}{\alpha_k}\binom{\gamma_k}{\delta_k} = \prod_{k=1}^n \binom{\beta_k+\gamma_k}{\varkappa_k} = C_{\beta+\gamma}^\varkappa,$$

что завершает доказательство формулы (6) и, значит, формулы Лейбница (5).

§ 4. Доказательство основной теоремы 1.

Ввиду изложенного в § 1, требуется доказать только достаточность. Пусть выполнена оценка (4). Так как

$$P_j(x, D) = P_j^l(D) + \sum_{|\alpha:l|<1} a_{j\alpha}(x)D^\alpha, \qquad j \in \{1, \ldots, N\},$$

из неравенства треугольника получим, что

$$\varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j^l(D)f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p \geqslant \varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_p - \varepsilon' \sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha:l|<1} \|a_{j\alpha}(x)D^\alpha f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p, \tag{10}$$

где $\varepsilon' := \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon+1} \in (0; 1)$. Кроме того, в силу неравенства (4),

$$\sum_{j=1}^N \sum_{|\alpha:l|<1} \|a_{j\alpha}(x)D^\alpha f\|_p \leqslant \varepsilon' \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D)f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{11}$$

Тогда из (10) и (11) с учетом (4) имеем:

$$\varepsilon' \sum_{j=1}^{N} \|P_j^l(D)f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p \geqslant \varepsilon' \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_p - \varepsilon' \left[\varepsilon' \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p\right]$$

$$+C_{\varepsilon'}\|f\|_p = (1-\varepsilon') \left[\varepsilon' \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_p + C_{\varepsilon'}\|f\|_p\right] \geqslant (1-\varepsilon') \sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_p. \qquad (12)$$

Разделив обе части неравенства (12) на $1-\varepsilon' > 0$, приходим к оценке

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_p \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \|P_j^l(D)f\|_p + C_\varepsilon \|f\|_p\,, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (13)$$

в которой $\dfrac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'} = \varepsilon$ и $C_\varepsilon := \dfrac{C_{\varepsilon'}}{1-\varepsilon'}$.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\varphi \neq 0$ п. в. Положим в (13) $f(x) := \varphi(x)e^{i\langle \xi^t, x\rangle}$, $x \in \Omega$. Так как для l-квазиоднородного оператора $P(D)$ по формуле Лейбница (5):

$$P(D)f = \sum_{\alpha} P^{(\alpha)}(D)\, e^{i\langle \xi^t, x\rangle} \cdot \frac{D^\alpha \varphi}{\alpha!} = e^{i\langle \xi^t, x\rangle} \left[t^d P(\xi)\,\varphi + \sum_{|\alpha|>0} t^{d-\langle \alpha, m\rangle} P^{(\alpha)}(\xi) \cdot \frac{D^\alpha \varphi}{\alpha!}\right],$$

то из оценки (13) вытекает неравенство

$$\sum_{\langle \alpha, m\rangle < d} \|D^\alpha f\|_p \leqslant \varepsilon\, t^d \left[\|\varphi\|_p \sum_{j=1}^{N} |P_j^l(\xi)| + \sum_{j=1}^{N} \sum_{|\alpha|>0} \frac{|(D^\alpha P_j^l)(\xi)|}{t^{\langle \alpha, m\rangle}} \cdot \frac{\|D^\alpha \varphi\|_p}{\alpha!}\right] + C_\varepsilon \|\varphi\|_p. \qquad (14)$$

Предположим противное, т. е. что система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ не l-квазиэллиптична. Тогда $P_j^l(\xi^0) = 0$, $j \in \{1,\ldots,N\}$, при некотором $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Выберем мультииндекс α с наименьшим значением $s := \langle \alpha, m\rangle$, $0 < s < d$ таким, что $(D^\alpha P_{j_0}^l)(\xi^0) \neq 0$ при некотором $j_0 \in \{1,\ldots,N\}$. Покажем, что это можно сделать. В самом деле, в противном случае, записывая разложение каждого из l-главных символов $P_j^l(\xi)$ по формуле Тейлора в точке $\xi = \xi^0$, имеем

$$P_j^l(\xi) = \sum_{\alpha} \frac{(D^\alpha P_j^l)(\xi^0)}{\alpha!}(\xi - \xi^0)^\alpha = \sum_{\langle \alpha, m\rangle = d} a_{j\alpha}(\xi - \xi^0)^\alpha \equiv P_j^l(\xi - \xi^0), \qquad j \in \{1,\ldots,N\}. \qquad (15)$$

Пусть, например, $\xi_1^0 \neq 0$. Тогда из тождеств (15) вытекает, что символы $P_j^l(\xi)$, $j \in \{1,\ldots,N\}$ не зависят от переменной ξ_1, что, очевидно, противоречит оценке (13).

Тогда, полагая $\xi = \xi^0$ и рассматривая в левой части (14) норму функции $(D^\alpha P_{j_0}^l)(D)f$, получим, что

$$t^{d-s}|(D^\alpha P_{j_0}^l)(\xi^0)| \cdot \|\varphi\|_p + o(t^{d-s}) \leqslant \varepsilon C t^{d-s} + o(t^{d-s}), \qquad t \to +\infty. \qquad (16)$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, деля обе части (16) на t^{d-s} и переходя к пределу при $t \to \infty$, придем к противоречию. Значит, система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ l-квазиэллиптична.

Теорема 1 полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 480 с.
2. Волевич Л. Р. Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных / Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
3. Лиманский Д. В. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева / Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд // Мат. сборник. - 2008. - Т. 199, № 11. - С. 75-112.
4. Бесов О. В. О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева / О. В. Бесов // Матем. сборник. - 1967. - Т. 73 (115), № 4. - С. 585-599.
5. Хёрмандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хёрмандер. – М.: ИЛ, 1959. – 132 с.
6. Ornstein D. A non-equality for differential operators in the L_1 norm / D. Ornstein // Arch. Rational Mech. Anal. - 1962. - V. 11, № 1. - P. 40-49.
7. Маламуд М. М. Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ / М.М. Маламуд // Труды ММО. – 1995. – Т.56. – С. 206–261.
8. De Leeuw K. A priori estimates for differential operators in L_∞ norm / K. de Leeuw, H. Mirkil // Illinois J. Math. - 1964. - V. 8, № 1. - P. 112-124.
9. Лиманский Д. В. О минимальных дифференциальных полиномах от двух переменных, слабо коэрцитивных в анизотропных пространствах Соболева / Д. В. Лиманский // Труды Института прикладной математики и механики. - 2016. - Т. 30. - С. 109-119.
10. Лиманский Д. В. Критерий слабой коэрцитивности системы минимальных дифференциальных операторов в анизотропных пространствах Соболева / Д. В. Лиманский // Вестник ДонНУ. Сер. А: Естественные науки. - 2019. - № 2. - С. 68-76.
11. Лиманский Д. В. Априорные оценки для слабо коэрцитивной системы минимальных дифференциальных полиномов в анизотропном пространстве Соболева / Д. В. Лиманский // Труды Института прикладной математики и механики. - 2019. - Т. 33. - С. 61-70.
12. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

Поступила в редакцию 15.08.2023 г.

ON A PRIORI ESTIMATES FOR A SYSTEM OF MINIMAL DIFFERENTIAL OPERATORS IN THE SCALE OF ANISOTROPIC SOBOLEV SPACES

D. V. Limanskii

We obtain a criterion of ε-weak coercivity in the scale of anisotropic Sobolev spaces $W^l_{p,0}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, for a system of minimal differential operators $\{P_j(x, D)\}_1^N$ with l-homogeneous principal parts having constant coefficients, $P^l_j(x, D) = P^l_j(D)$.

Keywords: a priori estimate, differential operator, ε-weak coercivity, Sobolev space, Leibniz formula.

Лиманский Дмитрий Владимирович
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
d.limanskiy@donnu.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Limanskii Dmitrii Vladimirovich
PhD (Ph.D), Assoc. Prof.
Donetsk State University, Donetsk, Russia