

УДК 517.1,51.8,519.66

НОВЫЙ МЕТОД КОНСТРУИРОВАНИЯ МАГИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ ПРИ ПОМОЩИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЕЙ© 2023. *А. Ю. Иванов, А.-В. В. Мельник*

В статье распространяется авторский метод построения магических квадратов нечетного порядка на случай матриц, порядок которых удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Ключевые слова: Магический квадрат, полумагический квадрат, латинский квадрат, перестановка, трансверсаль.

Введение. Матрицу $n \times n$, заполненную целыми числами от 1 до n^2 так, что их суммы в каждой строке и столбце равны $\Sigma(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}$, называют полумагическим квадратом, а если к тому же суммы элементов, находящихся на главной и побочной диагоналях, также равны $\Sigma(n)$, то такую матрицу называют магическим квадратом [1].

Исследование матриц, обладающих данными свойствами, интересовало человечество еще с древних времен [2]. Постепенно сформировалась математическая теория магических квадратов в рамках которой изучаются два основных направления исследований: вычисление количества различных магических квадратов заданного порядка и построение алгоритмов конструирования магических квадратов заданного порядка.

С историей становления и развития математической теории магических квадратов можно познакомиться в труде К. Оллереншоу и Г. Бонди [3], а также в [2]. Широкий набор методов конструирования магических квадратов представлен в книгах М. М. Постникова "Магические квадраты- [1] и Ю. В. Чебракова "Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ- [4].

В данной статье авторы распространяют алгоритм построения магических квадратов, введенный и обоснованный для квадратов нечетных порядков в [5], на случай матриц, порядок которых удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Вспомогательные обозначения и утверждения. Для построения и обоснования алгоритма конструирования магических квадратов потребуется ряд вспомогательных определений и утверждений. Продолжая серию работ авторов будем использовать терминологию введенную в статьях [2], [5].

Совокупность матриц $n \times n$, элементами которых являются числа от 1 до n^2 без повторений будем обозначать $M(n)$.

Определение 1. Матрицу $B_n = (b_{i,j})_{i,j=1}^n \in M(n)$ такую, что $b_{i,j} = n(i-1) + j$, $i, j = \overline{1, n}$, будем называть базовой.

Определение 2. Множество $\alpha = \{b_{1,j_1}, b_{2,j_2}, \dots, b_{n,j_n}\}$ из n элементов базовой матрицы B_n , где $(j_1 j_2 \dots j_n)$ является перестановкой $(1 2 \dots n)$, будем называть подходящим набором.

Исследование проводилось по теме государственного задания (регистрационный номер 1023031100003-2-1.1.1)

Определение 3. Совокупность Ω из n подходящих наборов $\alpha_1 = \{b_{1,j_1^1}, b_{2,j_2^1}, \dots, b_{n,j_n^1}\}$, $\alpha_2 = \{b_{1,j_1^2}, b_{2,j_2^2}, \dots, b_{n,j_n^2}\}, \dots, \alpha_n = \{b_{1,j_1^n}, b_{2,j_2^n}, \dots, b_{n,j_n^n}\}$ называется покрывающей, если не существует элемента $b_{i,j}$ базовой матрицы B_n , принадлежащего сразу двум различным подходящим наборам данной совокупности.

Определение 4. Две покрывающие совокупности Ω и Π называются совместимыми, если для каждой пары подходящих наборов $\alpha \in \Omega, \beta \in \Pi$ существует единственный элемент $b_{i,j}$ базовой матрицы B_n такой, что $\alpha \cap \beta = b_{i,j}$.

Следующее утверждение обосновано авторами в [2].

Лемма 1. Матрица $A \in M(n)$, каждая строка и каждый столбец которой состоит из элементов подходящих наборов базовой матрицы B_n , является полумагическим квадратом.

Для проведения дальнейших рассуждений потребуется набор сведений из математической теории латинских квадратов [6].

Определение 5. Латинским квадратом порядка n называется квадратная матрица $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$, элементами $t_{i,j}$ которой являются элементы некоторого множества U мощности n , при этом в каждой строке и каждом столбце латинского квадрата T каждый элемент множества U встречается ровно один раз.

Для определенности далее будем полагать, что множество $U = \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Определение 6. Два латинских квадрата $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ порядка n называются ортогональными латинскими квадратами, если все возможные упорядоченные пары $(l_{i,j}, t_{i,j})$ $i, j = \overline{1, n}$, образованные данными латинскими квадратами, различны.

Лемма 2. Для каждого натурального $n (\neq 6) \geq 3$ существует пара ортогональных латинских квадратов порядка n .

Следующий набор утверждений доказан авторами в работе [5].

Рассмотрим произвольный латинский квадрат $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ порядка n . Будем говорить, что совокупность наборов элементов базовой матрицы $\Omega = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$ соответствует латинскому квадрату L , если каждый набор α_k состоит из таких элементов $b_{i,j} \in B_n$, что $l_{i,j} = k - 1$.

Лемма 3. Каждый из наборов $\alpha_k, k = \overline{1, n}$ соответствующей латинскому квадрату $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ совокупности $\Omega = \{\alpha_k\}_{k=1}^n$ является подходящим набором, а сама совокупность Ω является покрывающей совокупностью.

Лемма 4. Пусть $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ образуют пару ортогональных латинских квадратов, а $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$ являются покрывающими совокупностями, которые соответствуют латинским квадратам L и T соответственно. Тогда Ω и Π являются совместимыми покрывающими совокупностями.

Определение 7. Трансверсалью τ^T латинского квадрата T называется множество элементов $\tau^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$, где $t_{i,j_i} \in T$, $(j_1 j_2 \dots j_n)$ является перестановкой $(1 2 \dots n)$ и $t_{i,j_i} \neq t_{k,j_k}, i, k = \overline{1, n} (i \neq k)$.

Лемма 5. Пусть $\tau^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$ трансверсаль латинского квадрата $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$, тогда множество $\alpha = \{b_{1,j_1}, b_{2,j_2}, \dots, b_{n,j_n}\}$, где $b_{i,j_i} \in B_n$ является подходящим набором базовой матрицы B_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\tau^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$ является трансверсалью латинского квадрата T , то $(j_1 j_2 \dots j_n)$ является перестановкой $(1 2 \dots n)$, но согласно определению 2 это и означает, что множество $\alpha = \{b_{1,j_1}, b_{2,j_2}, \dots, b_{n,j_n}\}$ является

подходящим набором базовой матрицы B_n . □

Замечание 1. Введенное понятие трансверсали в совокупности с утверждением леммы 5 наталкивает на мысль о том, что при построении алгоритмов конструирования полумагических квадратов, аналогичных введенным авторами в работах [2], [5] в пункте (iii) должны быть выбраны такие перестановки $(j_1 j_2 \dots j_n)$ и $(i_1 i_2 \dots i_n)$ набора $(1 2 \dots n)$, что на диагоналях конструируемой матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M(n)$ будут находиться элементы базовой матрицы B_n , соответствующие трансверсалим латинских квадратов, порождающих покрывающие совокупности Ω и Π .

Определение 8. Трансверсаль $\tau^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$ латинского квадрата $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ будем называть совпадающей с трансверсалью $\kappa^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2}, \dots, l_{n,i_n}\}$ латинского квадрата $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$, если перестановки $(j_1 j_2 \dots j_n)$ и $(i_1 i_2 \dots i_n)$ набора $(1 2 \dots n)$ совпадают между собой.

Определение 9. Трансверсали $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$, $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \dots, t_{n,i_n}\}$ латинского квадрата $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ называются ортогональными, если соответствующие им перестановки $(j_1 j_2 \dots j_n)$ и $(i_1 i_2 \dots i_n)$ набора $(1 2 \dots n)$ удовлетворяют условию $j_k \neq i_k, k = \overline{1, n}$.

Определение 10. Пусть n – нечетное, тогда трансверсали $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$, $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \dots, t_{n,i_n}\}$ латинского квадрата $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ будем называть почти ортогональными, если соответствующие им перестановки $(j_1 j_2 \dots j_n)$ и $(i_1 i_2 \dots i_n)$ набора $(1 2 \dots n)$ удовлетворяют следующим условиям:

- (i) существует p такое, что $i_p = j_p$;
- (ii) $j_k \neq i_k, k = \overline{1, n} (k \neq p)$.

Основной результат. В данном пункте строится алгоритм конструирования магических квадратов, являющийся обобщением алгоритма, предложенного авторами в работе [5], на случай матриц различных порядков, допускающих расположение подходящих наборов на главной и побочной диагоналях согласно замечанию из предыдущего пункта.

Будем рассматривать пару совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π базовой матрицы B_n , соответствующих ортогональным латинским квадратам $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$. Пусть существуют две пары совпадающих и ортогональных для четного n (почти ортогональных для нечетного n) трансверсалей $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$, $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \dots, t_{n,i_n}\}$ латинского квадрата T и $\kappa_1^L = \{l_{1,j_1}, l_{2,j_2}, \dots, l_{n,j_n}\}$, $\kappa_2^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2}, \dots, l_{n,i_n}\}$ латинского квадрата L соответственно, причем трансверсали $\tau_1^T, \tau_2^T, \kappa_1^L, \kappa_2^L$ удовлетворяют следующим условиям:

- (i) при четном n для всякого натурального $s \leq n$ существуют натуральные p, p', s' такие, что $l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}, t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}, t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$;
- (ii) при нечетном n существуют натуральные $r, r' \leq n$ такие, что $t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$ и $l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$, а кроме того, для всякого натурального $s (\neq r) \leq n$ существуют натуральные $p (\neq r), p' (\neq r'), s' (\neq r')$ такие, что $l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}, t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}, t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$.

В этом случае будем говорить, что совместимые покрывающие совокупности Ω и Π удовлетворяют условию **B**.

Фактически условие **B** означает, что соответствующие совместимым покрывающим совокупностям Ω и Π латинские квадраты L и T содержат совпадающую пару ортогональных (почти ортогональных для нечетного порядка матриц) трансверсалей, которые

можно разбить на непересекающиеся подмножества по четыре элемента, так что элементы базовой матрицы, соответствующие данным трансверсалам, можно будет расположить по главной и побочной диагоналям без противоречий. К сожалению, на текущий момент развитие математической теории латинских квадратов не может ответить на вопрос о том для матриц какого порядка существуют пары совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π , удовлетворяющих условию **B**.

Определение 11. Множество, состоящее из натуральных чисел n , для которых существует пара удовлетворяющих условию **B**, совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π базовой матрицы B_n , будем обозначать **MAVV**.

Пусть $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$ образуют пару ортогональных латинских квадратов, а $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$ являются совместимыми покрывающими совокупностями, которые соответствуют латинским квадратам L и T соответственно, причем Ω и Π удовлетворяют условию **B**. Пусть также существуют две пары совпадающих и ортогональных для четного n (почти ортогональных для нечетного n) трансверсалий $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$, $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \dots, t_{n,i_n}\}$ латинского квадрата T и $\kappa_1^L = \{l_{1,j_1}, l_{2,j_2}, \dots, l_{n,j_n}\}$, $\kappa_2^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2}, \dots, l_{n,i_n}\}$ латинского квадрата L . Пару перестановок $(u_1 u_2 \dots u_n)$ и $(v_1 v_2 \dots v_n)$ набора $(1 2 \dots n)$ будем называть **B-ассоциированной** парой перестановок к Ω и Π , если выполняются следующие условия:

- (i) при четном $n = 2k$ для каждого натурального $m \leq n$ существуют натуральные p, p', s, s' такие, что $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $v_{n+1-m} - 1 = t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $u_{n+1-m} - 1 = l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$;
- (ii) при нечетном $n = 2k + 1$ существуют натуральные $r, r' \leq n$ такие, что $v_{k+1} - 1 = t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$ и $u_{k+1} - 1 = l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$, а кроме того, для всякого натурального $s (\neq r) \leq n$ существуют натуральные $p (\neq r), p' (\neq r'), s' (\neq r')$ такие, что $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $v_{n+1-m} - 1 = t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $u_{n+1-m} - 1 = l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$.

Заметим, что для каждой пары совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π , удовлетворяющих условию **B**, существует $k!2^{2k}$ (где $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) различных **B-ассоциированных** упорядоченных пар перестановок.

Сформулируем алгоритм, позволяющий конструировать магические квадраты порядка $n \in \text{MAVV}$.

Алгоритм. Пусть $n \in \text{MAVV}$, тогда для построения матрицы $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in M(n)$, являющейся магическим квадратом порядка n , достаточно выполнить следующую последовательность действий:

- (i) Построить две совместимые покрывающие совокупности Ω и Π , удовлетворяющие условию **B**.
- (ii) Пронумеровать подходящие наборы каждой из покрывающих совокупностей от 1 до n : $\alpha_i \in \Omega, i = \overline{1, n}, \beta_j \in \Pi, j = \overline{1, n}$.
- (iii) Взять пару **B-ассоциированных** перестановок $(u_1 u_2 \dots u_n)$ и $(v_1 v_2 \dots v_n)$ к Ω и Π (для удобства их можно записать напротив строк и столбцов конструируемой матрицы).
- (iv) Заполнить ячейки конструируемой матрицы так, что каждый ее элемент $a_{t,p}$ определяется следующим соотношением: $a_{t,p} = \alpha_{u_t} \cap \beta_{v_p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем возможность выполнения каждого из пунктов алгоритма, а также то, что построенная в результате его выполнения матрица $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$ удовлетворяет определению магического квадрата.

1) Так как $n \in \text{MAVV}$, то по определению 11 существует пара совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π , удовлетворяющих условию **B**.

2) Данный пункт алгоритма выполним всегда.

3) Так как $\Omega = \{\alpha_p\}_{p=1}^n$ и $\Pi = \{\beta_q\}_{q=1}^n$ удовлетворяют условию **B**, то латинские квадраты $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^n$ и $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^n$, которым соответствуют Ω и Π , являются ортогональной парой латинских квадратов, кроме того, существуют две пары совпадающих и ортогональных для четного n (почти ортогональных для нечетного n) трансверсалей $\tau_1^T = \{t_{1,j_1}, t_{2,j_2}, \dots, t_{n,j_n}\}$, $\tau_2^T = \{t_{1,i_1}, t_{2,i_2}, \dots, t_{n,i_n}\}$ латинского квадрата T и $\kappa_1^L = \{l_{1,j_1}, l_{2,j_2}, \dots, l_{n,j_n}\}$, $\kappa_2^L = \{l_{1,i_1}, l_{2,i_2}, \dots, l_{n,i_n}\}$ латинского квадрата L , соответственно, причем трансверсали $\tau_1^T, \tau_2^T, \kappa_1^L, \kappa_2^L$ удовлетворяют следующим условиям:

- (i) при четном n для всякого натурального $s \leq n$ существуют натуральные p, p', s' такие, что $l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$;
- (ii) при нечетном n существуют натуральные $r, r' \leq n$ такие, что $t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$ и $l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$, а кроме того, для всякого натурального $s (\neq r) \leq n$ существуют натуральные $p (\neq r), p' (\neq r'), s' (\neq r')$ такие, что $l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$.

Рассмотрим пару перестановок $(u_1 u_2 \dots u_n)$ и $(v_1 v_2 \dots v_n)$ набора $(1 2 \dots n)$, определенных следующим образом:

- (i) при четном $n = 2k$: $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $v_{n+1-m} - 1 = t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $u_{n+1-m} - 1 = l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$;
- (ii) при нечетном $n = 2k + 1$: $v_{k+1} - 1 = t_{r',i_{r'}} = t_{r,j_r}$ и $u_{k+1} - 1 = l_{r',i_{r'}} = l_{r,j_r}$, а кроме того $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}} = l_{s,j_s}$, $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}} = t_{p,j_p}$, $v_{n+1-m} - 1 = t_{s',i_{s'}} = t_{s,j_s}$ и $u_{n+1-m} - 1 = l_{s',i_{s'}} = l_{p,j_p}$.

Таким образом, введенные выше перестановки являются **B**-ассоциированными перестановками к Ω и Π .

4) Так как совокупности Ω и Π являются совместимыми покрывающими, то, согласно определению 4, для любых подходящих наборов $\alpha_{u_t} \in \Omega, \beta_{v_p} \in \Pi$ существует единственный элемент $b_{u,v} = \alpha_{u_t} \cap \beta_{v_p}$. Присвоим его значение элементу $a_{t,p}$ искомой матрицы A . Выполнив данную процедуру для каждой пары подходящих наборов совокупностей Ω и Π , получим n^2 различных элементов базовой матрицы B_n , полностью заполняющих матрицу A . Таким образом, $A \in \mathbf{M}(n)$.

Рассмотрим произвольную строку t полученной выше матрицы A . Все элементы данной строки находятся из соотношений $\alpha_{u_t} \cap \beta_{v_p}$. Отсюда следует, что каждый элемент строки t матрицы A принадлежит подходящему набору α_{u_t} , при этом все они различны и всего их n . Значит, элементы строки t матрицы A образуют подходящий набор α_{u_t} . Отсюда следует, что строки матрицы A состоят из элементов подходящих наборов совокупности Ω . Аналогично получаем, что столбцы матрицы A состоят из элементов подходящих наборов совокупности Π . Тогда из леммы 1 непосредственно следует, что построенная выше матрица A является полумагическим квадратом.

Рассмотрим диагонали построенной матрицы A , а именно элементы $a_{m,m}$. Согласно пункту (iv) условий построения получаем, что $a_{m,m} = \alpha_{u_m} \cap \beta_{v_m}$, тогда $a_{m,m} = b_{u,v}$

такому, что $l_{u,v} = u_m - 1, t_{u,v} = v_m - 1$. Но так как $(u_1 u_2 \dots u_n)$ и $(v_1 v_2 \dots v_n)$ являются **B**-ассоциированной парой перестановок к Ω и Π , то если n – четно получаем, что $u_m - 1 = l_{p',i_{p'}}$ — элемент трансверсали τ_2^T , $v_m - 1 = t_{p',i_{p'}}$ — элемент трансверсали κ_2^T , т. е. искомым элементом базовой матрицы $b_{i,j} = b_{p',i_{p'}}$. Таким образом, согласно лемме 5 элементы, находящиеся на главной диагонали матрицы A , образуют подходящий набор, а значит их сумма равна $\Sigma(n)$. Аналогичный результат получаем при нечетном n .

Произведя подобные рассуждения получаем, что элементы, находящиеся на побочной диагонали матрицы A , соответствуют по расположению в базовой матрице трансверсалим τ_1^T и κ_1^T , а значит также образуют подходящий набор с общей суммой $\Sigma(n)$.

Таким образом показали, что матрица A , построенная согласно введенному выше алгоритму, является магическим квадратом. \square

Замечание 2. Одним из наиболее важных вопросов в плане применимости построенного выше алгоритма является изучение множества порядков **MAVV**. На данный момент можно однозначно сказать, что согласно лемме 2 $n \neq 6$ и не меньше 3, так как для данных порядков отсутствуют пары ортогональных латинских квадратов. Что же касается определения порядков, при которых существуют такие пары ортогональных (или почти ортогональных для нечетных n) трансверсалей таких, что выполняется условие **B**, то окончательного ответа на данный вопрос математическая теория латинских квадратов на данный момент не имеет, хотя очевидно, что, например, порядки, для которых существуют диагональные латинские квадраты (см., например, [6]) имеют пары ортогональных (или почти ортогональных, в зависимости от четности порядка n) совпадающих трансверсалей.

Замечание 3. Говоря о количестве конструируемых магических квадратов при помощи построенного выше алгоритма следует отметить следующее:

- (i) Каждый магический квадрат, построенный при помощи данного алгоритма, не может быть построен при помощи двух различных пар совместимых покрывающих совокупностей. Таким образом, каждая пара совместимых покрывающих совокупностей порождает уникальный набор магических квадратов.
- (ii) Не все пары совместимых покрывающих совокупностей удовлетворяют условию **B**, так как не всегда существуют подходящие пары трансверсалей. С другой стороны, для некоторых пар совместимых покрывающих совокупностей существует несколько комбинаций подходящих трансверсалей, каждая из которых порождает уникальный набор магических квадратов.
- (iii) Каждой паре совместимых покрывающих совокупностей Ω и Π , удовлетворяющих условию **B**, для каждой конкретной пары подходящих трансверсалей построенный алгоритм дает $k!2^{2k-2}$ (где $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) различных магических квадратов (учитывая произвольность перестановок из третьего пункта алгоритма, а также повороты и отражения).

Пример применения алгоритма к построению магического квадрата. В данном параграфе продемонстрируем в действии разработанный в статье алгоритм конструирования магических квадратов порядка $n \in \mathbf{MAVV}$.

Будем рассматривать матрицы порядка 8. Для начала необходимо выбрать пару совместимых покрывающих совокупностей, удовлетворяющих условию **B**. Для этой цели рассмотрим пару диагональных ортогональных латинских квадрата L_8 и T_8 порядка 8.

На рисунке 1 приведена базовая матрица B_8 , а на рисунке 2 — пара диагональных ортогональных латинских квадрата L_8 и T_8 .

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Рис. 1. базовая матрица B_8

0	1	2	3	4	5	6	7
2	3	0	1	6	7	4	5
4	5	6	7	0	1	2	3
6	7	4	5	2	3	0	1
5	4	7	6	1	0	3	2
7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	3	2	5	4	7	6
3	2	1	0	7	6	5	4

0	1	2	3	4	5	6	7
3	2	1	0	7	6	5	4
6	7	4	5	2	3	0	1
5	4	7	6	1	0	3	2
1	0	3	2	5	4	7	6
2	3	0	1	6	7	4	5
7	6	5	4	3	2	1	0
4	5	6	7	0	1	2	3

Рис. 2. Пара диагональных ортогональных латинских квадратов L_8 и T_8

По приведенным латинским квадратам построим подходящие наборы покрывающих совокупностей Ω_8 и Π_8 :

Ω_8 : $\alpha_1 = \{1, 11, 21, 31, 38, 48, 50, 60\}$, $\alpha_2 = \{2, 12, 22, 32, 37, 47, 49, 59\}$, $\alpha_3 = \{3, 9, 23, 29, 40, 46, 52, 58\}$, $\alpha_4 = \{4, 10, 24, 30, 39, 45, 51, 57\}$, $\alpha_5 = \{5, 15, 17, 27, 34, 44, 54, 64\}$, $\alpha_6 = \{6, 16, 18, 28, 33, 43, 53, 63\}$, $\alpha_7 = \{7, 13, 19, 25, 36, 42, 56, 62\}$ и $\alpha_8 = \{8, 14, 20, 26, 35, 41, 55, 61\}$.

Π_8 : $\beta_1 = \{1, 12, 23, 30, 34, 43, 56, 61\}$, $\beta_2 = \{2, 11, 24, 29, 33, 44, 55, 62\}$, $\beta_3 = \{3, 10, 21, 32, 36, 41, 54, 63\}$, $\beta_4 = \{4, 9, 22, 31, 35, 42, 53, 64\}$, $\beta_5 = \{5, 16, 19, 26, 38, 47, 52, 57\}$, $\beta_6 = \{6, 15, 20, 25, 37, 48, 51, 58\}$ и $\beta_7 = \{7, 14, 17, 28, 40, 45, 50, 59\}$, $\beta_8 = \{8, 13, 18, 27, 39, 46, 49, 60\}$.

Рассмотрим пару трансверсалей латинского квадрата T , находящихся на диагоналях данной матрицы: $\tau_1^T = \{0, 3, 6, 5, 1, 2, 7, 4\}$ (главная диагональ), $\tau_2^T = \{7, 4, 1, 2, 6, 5, 0, 3\}$ (побочная диагональ). Так как τ_1^T, τ_2^T не пересекаются, то данные трансверсали являются ортогональными. Нетрудно заметить, что элементы, расположенные на главной и побочной диагонали латинского квадрата L , также образуют трансверсали κ_1^L, κ_2^L , значит найдены две пары совпадающих трансверсалей. Заметим теперь, что элементы данных трансверсалей можно разбить на непересекающиеся четверки. Таким образом, совместимые покрывающие совокупности Ω_8 и Π_8 удовлетворяют условию **B**, а значит $8 \in \text{MAVV}$.

	2	1	3	4	7	8	6	5
6	37	48	58	51	25	20	6	15
1	12	1	23	30	56	61	43	34
8	49	60	46	39	13	8	18	27
3	32	21	3	10	36	41	63	54
5	47	38	52	57	19	26	16	5
2	2	11	29	24	62	55	33	44
7	59	50	40	45	7	14	28	17
4	22	31	9	4	42	35	53	64

Рис. 3. Магический квадрат

Для построения **B-ассоциированных** перестановок $(u_1 u_2 \dots u_8)$ и $(v_1 v_2 \dots v_8)$ отметим следующие четверки связанных латинскими квадратами L_8 и T_8 элементов главной и побочной диагоналей базовой матрицы:

$\{1, 28, 43, 50\}$ образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_1, \alpha_6, \beta_1, \beta_7$;
 $\{15, 22, 37, 64\}$ образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_2, \alpha_5, \beta_4, \beta_6$;
 $\{8, 29, 41, 46\}$ образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_3, \alpha_8, \beta_2, \beta_8$;

{10, 25, 36, 57} образована попарными пересечениями подходящих наборов $\alpha_4, \alpha_7, \beta_3, \beta_5$.

Учитывая полученные сведения составим пару **В-ассоциированных** перестановок $(u_1 u_2 \dots u_8) = (2\ 1\ 3\ 4\ 7\ 8\ 6\ 5)$ и $(v_1 v_2 \dots v_8) = (6\ 1\ 8\ 3\ 5\ 2\ 7\ 4)$.

Магический квадрат, полученный в результате действий построенного нами алгоритма, представлен на рисунке 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников М. М. Магические квадраты / М. М. Постников. – Москва: издательство "Наука математическая библиотечка, 1964 – 84 с.
2. Иванов А. Ю. О построении магических квадратов / А. Ю. Иванов, А. -В. В. Мельник // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2020 – № 2. – С. 61–67.
3. Ollerenshaw K. Magic Squares of Order Four / K. Ollerenshaw, H. Bondi // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Mathematical and Physical Sciences. Royal Society – 1982 – V. 306 № 1495 – pp. 443–532
4. Чебраков Ю. В. Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ / Ю. В. Чебраков // СПб: СПбГТУ, 1995 – 388 с.
5. Иванов А. Ю. Особенности построения магических квадратов при помощи латинских квадратов / А. Ю. Иванов, А. -В. В. Мельник // Вестник Донецкого национального университета. Сер. А: Естественные науки. – 2022 – № 2. – С. 52–63.
6. Keedwell A. D. Latin squares and their applications / A. D. Keedwell, J. Dénes // Elsevier, Second edition – 2015 – 424 p.

Поступила в редакцию 28.08.2023 г.

A NEW METHOD OF CONSTRUCTING MAGIC SQUARES USING ORTHOGONAL TRANSVERSALS

A. Yu. Ivanov, A.-V. V. Melnik

The article applies the author's method of constructing magic squares of odd order to the case of matrices whose order satisfies some additional conditions.

Keywords: Magic square, semi-magic square, latin square, permutation, transversal.

Иванов Александр Юрьевич

кандидат физико-математических наук
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
o.ivanov@donnu.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

Ivanov Alexandr Jurievich

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Donetsk State University, Donetsk, Russia

Мельник Анна-Валентина Валентиновна

кандидат технических наук
ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, Россия
Anna-Valentina@yandex.ru
283001, пр. Гурова, 14, Главный корпус ДонГУ, кафедра прикладной механики и компьютерных технологий

Melnik Anna-Valentina Valentinovna

Candidate of Technical Sciences, Donetsk State University, Donetsk, Russia