

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ОТВЕРСТИЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

© 2024. С. А. Калоеров, М. А. Полянский, А. В. Сероштанов

Решена задача электромагнитоупругости для пьезополуплоскости с произвольно расположенными внутренними эллиптическими отверстиями и прямолинейными трещинами. При этом функции, голоморфные вне эллипсов (трещин), разлагаются в ряды Лорана по отрицательным степеням соответствующих переменных, а функции, голоморфные в нижних полуплоскостях, методом интегралов типа Коши выражаются через функции, получаемые от указанных при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе. При таком подходе граничные условия на прямолинейной границе полуплоскости удовлетворяются точно. Что же касается граничных условий на контурах отверстий, для их удовлетворения используется обобщенный метод наименьших квадратов, приводящий задачу к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов рядов Лорана. Как частные случаи получаются решения задач электроупругости, магнитоупругости и теории упругости, а также аналитические решения задач сплошной полуплоскости под действием усилий на границе или сосредоточенных воздействий в отдельных точках. Описаны результаты численных исследований для полуплоскости отверстиями и трещинами с установлением закономерностей изменения напряженно-деформированного состояния полуплоскости в зависимости от ее материалов, геометрических характеристик отверстий и трещин.

Ключевые слова: электромагнитоупругая пластинка, полуплоскость, отверстия, комплексные потенциалы, интегралы типа Коши, обобщенный метод наименьших квадратов.

Введение. Пьезопластики с отверстиями и трещинами широко используются в качестве элементов различных конструкций современной науки и техники [1–4]. Под действием различных механических сил и электромагнитных полей около таких отверстий и трещин могут возникать высокие концентрации напряжений, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации конструкций. Наиболее достоверные результаты по определению электромагнитоупругого состояния (ЭМУС) пластин с отверстиями и трещинами получаются при решении соответствующих задач методами, использующими комплексные потенциалы [5]. К настоящему времени с использованием последних функций решены широкие классы задач для конечных и бесконечных пластин с произвольными отверстиями и трещинами [5]. При этом, если пластинка представляется полуплоскостью, то лучшим подходом удовлетворения граничным условиям на прямолинейной границе является использование метода интегралов типа Коши [6–8], что позволяет удовлетворять этим условиям точно. Для удовлетворения же граничным условиям на контурах отверстий и трещин чаще всего использовался дискретный метод наименьших квадратов. Но как показывают последние исследования, для удовлетворения граничным условиям на замкнутых контурах лучше использовать обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) [9–11], который обеспечивает такую же высокую точность удовлетворения граничным условиям, как дискретный метод наименьших квадратов, но прост для численной реализации.

В данной работе с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости, метода интегралов типа Коши при удовлетворении граничным условиям на прямолинейной границе и ОМНК при удовлетворении граничным условиям на контурах отверстий и трещин дано решение задачи электромагнитоупругости для полуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами. Описаны результаты численных исследований, с помощью которых установлены закономерности изменения ЭМУС полуплос-

кости в зависимости от ее материала и геометрических характеристик отверстий и трещин, их взаиморасположения и сочетания.

1. Постановка и решение задачи. Рассмотрим занимающую нижнюю полуплоскость с эллиптическими отверстиями с контурами L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) и полуосями a_l , b_l (рис. 1) пьезопластинку, отнесенную к прямоугольной системе координат Oxy с началом в произвольной точке полуплоскости на расстоянии h^+ от прямолинейной границы L^+ и осью Ox , параллельной прямолинейной границе. В частном случае эллипсы могут переходить в прямолинейные разрезы-трещины (при $a_l = 0$ или $b_l = 0$), при наличии криволинейных отверстий их контуры могут аппроксимироваться дугами эллипсов и берегами трещин.

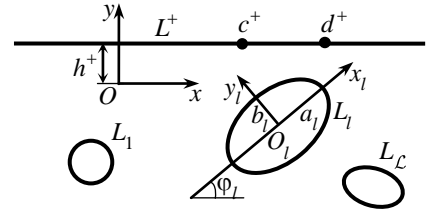


Рис. 1

Будем считать, что контуры отверстий L_l загружены самоуравновешенными внешними усилиями и электромагнитными индукциями, на бесконечности заданы напряжения σ_x^∞ и проекции векторов индукций D_x^∞ , B_x^∞ (или напряженностей E_x^∞ , H_x^∞), остальные напряжения, индукции (напряженности) и угол жесткого поворота полуплоскости, как целой, равны нулю, т. е. $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = D_y^\infty = B_y^\infty = \omega_3^\infty = 0$ (или $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = E_y^\infty = H_y^\infty = \omega_3^\infty = 0$). Кроме того, на отрезке $[c^+, d^+]$ прямолинейной границы L^+ заданы распределенные внешние усилия и компоненты векторов электрической и магнитной индукций, остальная ее часть не загружена и не подкреплена. во внутренних точках полуплоскости $z_r^0(x_r^0, y_r^0)$ ($r = \overline{1, R}$) действуют сосредоточенные силы $P_r^0(X_r^0, Y_r^0)$, электрические заряды $Q_{er}^0(Q_{erx}^0, Q_{ery}^0)$ и магнитные диполи $Q_{mr}^0(Q_{mrx}^0, Q_{mry}^0)$.

Отнесем эллипсы L_l к локальным системам координат $O_lx_l y_l$ с началами в их центрах и направлениями осей Ox_l вдоль полуосей эллипсов a_l , так что в системе $O_lx_l y_l$ параметрическое уравнение эллипса L_l будет таким:

$$x_l = a_l \cos \theta, \quad y_l = b_l \sin \theta, \quad (1)$$

а в основной системе координат Oxy имеет вид

$$\begin{aligned} x &= x_{0l} + x_l \cos \varphi_l - y_l \sin \varphi_l, \\ y &= y_{0l} + x_l \sin \varphi_l + y_l \cos \varphi_l, \end{aligned} \quad (2)$$

где θ – параметр параметрического задания эллипса, изменяющийся от 0 до 2π ; x_{0l} , y_{0l} – координаты начала локальной системы координат $O_lx_l y_l$ в основной системе координат Oxy ; φ_l – угол между направлениями осей Ox и O_lx_l , отсчитываемый от оси Ox против часовой стрелки.

Если задачу по определению ЭМУС рассматриваемой полуплоскости решать с использованием комплексных потенциалов электромагнитоупругости [5], то она сво-

даться к нахождению из соответствующих граничных условий функций $\Phi_k(z_k)$ ($k = \overline{1, 4}$) обобщенных комплексных переменных

$$z_k = x + \mu_k y, \quad (3)$$

где μ_k – корни характеристического уравнения 8-го порядка

$$\begin{vmatrix} l_{4s}(\mu) & l_{3g}(\mu) & l_{3p}(\mu) \\ l_{3g}(\mu) & l_{2\beta}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) \\ l_{3p}(\mu) & l_{2\nu}(\mu) & l_{2\chi}(\mu) \end{vmatrix} = 0; \quad (4)$$

$l_{ij}(\mu)$ – полиномы вида

$$\begin{aligned} l_{4s}(\mu) &= s_{11}\mu^4 - 2s_{16}\mu^3 + (2s_{12} + s_{66})\mu^2 - 2s_{26}\mu + s_{22}, \\ l_{3g}(\mu) &= g_{11}\mu^3 - (g_{21} + g_{16})\mu^2 + (g_{12} + g_{26})\mu - g_{22}, \\ l_{3p}(\mu) &= p_{11}\mu^3 - (p_{21} + p_{16})\mu^2 + (p_{12} + p_{26})\mu - p_{22}, \\ l_{2\beta}(\mu) &= -\beta_{11}\mu^2 + 2\beta_{12}\mu - \beta_{22}, \\ l_{2\nu}(\mu) &= -\nu_{11}\mu^2 + 2\nu_{12}\mu - \nu_{22}, \\ l_{2\chi}(\mu) &= -\chi_{11}\mu^2 + 2\chi_{12}\mu - \chi_{22}; \end{aligned} \quad (5)$$

s_{ki} – коэффициенты деформации материала пластинки, измеренные при постоянных индукциях электрического и магнитного полей; g_{ki} и p_{ki} – пьезоэлектрические и пьезомагнитные коэффициенты деформации и напряженностей электрического и магнитного полей, измеренные при постоянных напряжениях и индукциях; β_{ki} , χ_{ki} и ν_{ki} – коэффициенты диэлектрической, магнитной и электромагнитной восприимчивости, измеренные при постоянных значениях напряжений.

Граничные условия на контуре L_l (механические и электромагнитные) для определения комплексных потенциалов имеют вид [5]

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikl} \Phi_k(t_k) = f_{il}(t), \quad (6)$$

в котором в случае механических граничных условий (при $i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} (g_{1kl}, g_{2kl}) &= (1, -\mu_k), \\ (f_{1l}(t), f_{2l}(t)) &= \mp \int_0^s (Y_{nl}, X_{nl}) ds + (c_{1l}, c_{2l}), \end{aligned} \quad (7)$$

если на границе заданы усилия Y_{nl} , X_{nl} , и

$$\begin{aligned} (g_{1kl}, g_{2kl}) &= (p_k, q_k), \\ (f_{1l}(t), f_{2l}(t)) &= (u_l^* + \omega_{3l}y + c_{1l}, v_l^* - \omega_{3l}x + c_{2l}), \end{aligned} \quad (8)$$

когда на границе заданы перемещения u_l^* , v_l^* ; в случае электромагнитных граничных условий (при $i = 3, 4$)

$$\begin{aligned} (g_{3kl}, g_{4kl}) &= (-v_k, -\rho_k), \\ (f_{3l}(t), f_{4l}(t)) &= \mp \int_0^s (D_{nl}, B_{nl}) ds + (c_{3l}, c_{4l}), \end{aligned} \quad (9)$$

если на границе заданы вектора индукции поля D_{nl}, B_{nl} ,

$$\begin{aligned} (g_{3kl}, g_{4kl}) &= (r_k, h_k), \\ (f_{3l}(t), f_{4l}(t)) &= (\varphi_l^*(t) + c_{3l}, \psi_l^*(t) + c_{4l}), \end{aligned} \quad (10)$$

когда на границе заданы потенциалы поля $\varphi_l^*(t), \psi_l^*(t)$;

$$\begin{aligned} p_k &= s_{11}\mu_k^2 - s_{16}\mu_k + s_{12} + (g_{11}\mu_k - g_{21})v_k + (p_{11}\mu_k - p_{21})\rho_k, \\ q_k &= s_{12}\mu_k - s_{26} + \frac{s_{22}}{\mu_k} + \left(g_{12} - \frac{g_{22}}{\mu_k}\right)v_k + \left(p_{12} - \frac{p_{22}}{\mu_k}\right)\rho_k, \\ r_k &= g_{11}\mu_k^2 - g_{16}\mu_k + g_{12} - (\beta_{11}\mu_k - \beta_{12})v_k - (v_{11}\mu_k - v_{12})\rho_k, \\ h_k &= p_{11}\mu_k^2 - p_{16}\mu_k + p_{12} - (v_{11}\mu_k - v_{12})v_k - (\chi_{11}\mu_k - \chi_{12})\rho_k; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{\Delta_{1k}}{\Delta_{0k}}, \quad \rho_k = \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{0k}}, \quad \Delta_{0k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \\ \Delta_{1k} &= \begin{vmatrix} -l_{3g}(\mu_k) & l_{2\nu}(\mu_k) \\ -l_{3p}(\mu_k) & l_{2\chi}(\mu_k) \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2k} = \begin{vmatrix} l_{2\beta}(\mu_k) & -l_{3g}(\mu_k) \\ l_{2\nu}(\mu_k) & -l_{3p}(\mu_k) \end{vmatrix}; \end{aligned} \quad (12)$$

c_{il} – постоянные, произвольные на одном из контуров отверстий; ω_{3l} – угол поворота контура отверстия как целого в случае жесткого его подкрепления.

В рассматриваемом случае комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в многосвязных нижних полуплоскостях S_k , ограниченных прямолинейными границами L_k^+ и контурами отверстий L_{kl} , соответствующих исходным прямолинейной границе L^+ и контурам отверстий L_l , и имеют вид [5]

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k), \quad (13)$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений 8-го порядка

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k &= \\ &= (0, 0, \sigma_x^\infty, 0, 0, D_x^\infty, 0, B_x^\infty), \end{aligned} \quad (14)$$

если на бесконечности заданы векторы индукций поля, или из системы уравнений

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \mu_k^2, q_k - \mu_k p_k, v_k, \mu_k v_k, \rho_k, \mu_k \rho_k) \Gamma_k &= \\ &= (0, 0, \sigma_x^\infty, 0, -E_x^\infty, 0, -H_x^\infty, 0), \end{aligned} \quad (15)$$

когда на бесконечности заданы векторы напряженностей поля;

$$N_k(z_k) = \sum_{r=1}^R A_{kr}^0 \ln(z_k - z_{kr}^0); \quad (16)$$

A_{kr}^0 – постоянные, определяемые из решения системы линейных уравнений

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (1, \mu_k, \nu_k, \rho_k, p_k, q_k, r_k, h_k) iA_{kr}^0 = \left(\frac{Y_r^0}{2\pi}, -\frac{X_r^0}{2\pi}, -\frac{Q_{er}^0}{2\pi}, -\frac{Q_{mr}^0}{2\pi}, 0, 0, 0, 0 \right); \quad (17)$$

$\Phi_{k0}(z_k)$ – функции, голоморфные в нижних полуплоскостях с прямолинейными границами L_k^+ , соответствующих прямолинейной границе L^+ при аффинных преобразованиях (3); $\Phi_{kl}(z_k)$ – функции, голоморфные вне контуров L_{kl} областей S_k , соответствующих эллипсам L_l области S при аффинных преобразованиях (3). Для построения указанных функций используем конформные отображения.

Отобразим конформно внешности единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$ на внешности эллипсов L_{kl} , используя формулы [12]

$$z_k = z_{kl} + R_{kl} \left(\zeta_{kl} + \frac{m_{kl}}{\zeta_{kl}} \right), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} z_{kl} &= x_{0l} + \mu_k y_{0l}, \\ R_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) + ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2}, \\ m_{kl} &= \frac{a_l (\cos \varphi_l + \mu_k \sin \varphi_l) - ib_l (\sin \varphi_l - \mu_k \cos \varphi_l)}{2R_{kl}}. \end{aligned}$$

После этих конформных отображений функции $\Phi_{kl}(z_k)$ ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$), голоморфные вне отверстий с контурами L_{kl} , в областях переменных ζ_{kl} будут голоморфными вне единичных кругов $|\zeta_{kl}| \geq 1$, включая бесконечно удаленную точку, и здесь их можно раз-

ложить в ряды Лорана по отрицательным степеням ζ_{kl} , т. е. $\Phi_{kl}(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{kln}}{\zeta_{kl}^n}$. Окончательно для комплексных потенциалов (13) имеем

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + N_k(z_k) + \Phi_{k0}(z_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{kln} \varphi_{kln}(z_k), \quad (19)$$

где

$$\varphi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n(z_k)} \quad (l = \overline{1, \mathcal{L}});$$

a_{kln} – неизвестные постоянные, которые будем определять из граничных условий на контурах пластинки.

Для прямолинейной границы, на конечном отрезке которой заданы непрерывно распределенные усилия и индукции (для этого случая коэффициенты перед комплексными потенциалами в граничных условиях обозначим индексом нуль вверху, в отличие от пьезоэлектрических коэффициентов деформации g_{1k}), в граничных условиях имеем

$$g_{1kl} = g_{1k}^0 = 1, \quad g_{2kl} = g_{2k}^0 = -\mu_k, \quad g_{3kl} = g_{3k}^0 = -\nu_k, \quad g_{4kl} = g_{4k}^0 = -\rho_k, \\ (f_1^+(t), f_2^+(t), f_3^+(t), f_4^+(t)) = \int_0^s (Y_n^+, X_n^+, D_n^+, B_n^+) ds + (c_1^+, c_2^+, c_3^+, c_4^+). \quad (20)$$

Тогда граничные условия (6) на прямолинейной границе L^+ можно записать в виде системы 4 линейных уравнений

$$g_{1k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{1k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{1k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) + \\ + g_{1k+3}^0 \Phi_{k+3}(t_{k+3}) = f_1^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{1k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)}, \\ g_{2k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{2k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{2k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) + \\ + g_{2k+3}^0 \Phi_{k+3}(t_{k+3}) = f_2^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{2k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)}, \\ g_{3k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{3k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{3k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) + \\ + g_{3k+3}^0 \Phi_{k+3}(t_{k+3}) = f_3^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{3k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)}, \\ g_{4k}^0 \Phi_k(t_k) + g_{4k+1}^0 \Phi_{k+1}(t_{k+1}) + g_{4k+2}^0 \Phi_{k+2}(t_{k+2}) + \\ + g_{4k+3}^0 \Phi_{k+3}(t_{k+3}) = f_4^+(t) - \sum_{q=1}^4 \overline{g_{4k+q-1}^0} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_k)} \quad (21)$$

с определителем

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} g_{1k}^0 & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 & g_{1k+3}^0 \\ g_{2k}^0 & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 & g_{2k+3}^0 \\ g_{3k}^0 & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 & g_{3k+3}^0 \\ g_{4k}^0 & g_{4k+1}^0 & g_{4k+2}^0 & g_{4k+3}^0 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^4 g_{ik}^0 M_{ik}, \quad (22)$$

в котором M_{ik} – алгебраические дополнения элементов первого столбца g_{ik}^0 .

Решая систему (21), найдем

$$\Phi_k(t_k) = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta_k},$$

где

$$\Delta_{kk} = \begin{vmatrix} f_1^+(t) - \sum_{q=1}^4 \frac{g_{1k+q-1}^0}{\Delta_k} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{1k+1}^0 & g_{1k+2}^0 & g_{1k+3}^0 \\ f_2^+(t) - \sum_{q=1}^4 \frac{g_{2k+q-1}^0}{\Delta_k} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{2k+1}^0 & g_{2k+2}^0 & g_{2k+3}^0 \\ f_3^+(t) - \sum_{q=1}^4 \frac{g_{3k+q-1}^0}{\Delta_k} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{3k+1}^0 & g_{3k+2}^0 & g_{3k+3}^0 \\ f_4^+(t) - \sum_{q=1}^4 \frac{g_{4k+q-1}^0}{\Delta_k} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} & g_{4k+1}^0 & g_{4k+2}^0 & g_{4k+3}^0 \end{vmatrix}$$

или

$$\Phi_k(t_k) = \frac{1}{\Delta_k} \sum_{i=1}^4 \left[f_i^+(t) - \sum_{q=1}^4 \frac{g_{ik+q-1}^0}{\Delta_k} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} \right] M_{ik}.$$

Окончательно граничные условия на прямолинейной границе запишем в виде

$$\Phi_k(t_k) = \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} f_i^+(t) - \sum_{q=1}^4 r_{kk+q-1} \overline{\Phi_{k+q-1}(t_{k+q-1})} \quad (k = \overline{1, 4}), \quad (23)$$

где

$$r_{kk+q-1} = \sum_{i=1}^4 \frac{g_{ik+q-1}^0}{\Delta_k} M_{ik}. \quad (24)$$

Для точек прямолинейной границы L^+ имеем

$$\begin{aligned} x &= t, \quad y = h^+, \quad z = x + iy = t + ih^+, \\ z_k &= t_k = x + \mu_k y = t + \mu_k h^+, \\ \overline{t_k} &= t + \overline{\mu_k} h^+ = t + \mu_k h^+ + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+ = t_k + (\overline{\mu_k} - \mu_k) h^+, \\ \overline{t_{k+q-1}} &= t + \overline{\mu_{k+q-1}} h^+ = t + \mu_k h^+ + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ = \\ &= t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \quad (q = \overline{1, 4}). \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив функции (13) в граничные условия (23) на прямолинейной границе L^+ , получим

$$\begin{aligned} N_k(t_k) + \Phi_{k0}(t_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \Phi_{kl}(z_k) &= \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} f_i^+(t) - \\ &\sum_{q=1}^4 r_{kk+q-1} \left[\overline{N_{k+q-1}(t_{k+q-1})} + \Phi_{k+q-1,0}(t_k) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \overline{\Phi_{k+q-1l}(t_{k+q-1})} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь учтено, что на основе систем уравнений (14) и (15)

$$\Gamma_k t_k - \sum_{q=1}^4 r_{kk+q-1} \overline{\Gamma_{k+q-1} t_{k+q-1}} = 0.$$

На прямолинейной границе для граничных значений сопряженных величин имеем

$$\overline{\Phi_{k+q-1,0}(t_{k+q-1})} = \overline{\Phi_{k+q-1,0}(t_{k+q-1})} = \overline{\Phi_{k+q-1,0}(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+)},$$

$$\begin{aligned} \overline{N_{k+q-1}(t_{k+q-1})} &= \overline{N_{k+q-1}} \left(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) = \\ &= N_{k+q-1}^+(t_k) = \sum_{r=1}^R \overline{A_{kr}^0} \ln \left(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ - \overline{z_{k+q-1r}^0} \right), \\ \overline{\Phi_{k+q-1l}(t_{k+q-1})} &= \overline{\Phi_{k+q-1l}} \left(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) = \\ &= \Phi_{k+q-1l}^+(t_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_{k+q-1ln}}}{\left[\overline{\zeta_{k+q-1l}^+} \left(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) \right]^n}. \end{aligned} \quad (27)$$

Кроме того, при переходе в конформных отображениях (18) к сопряженным величинам и замене граничных значений по формулам (25) для граничных значений переменных находим

$$\overline{z_{k+q-1}} = t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ = \overline{z_{k+q-1l}} + \overline{R_{k+q-1l}} \left(\overline{\zeta_{k+q-1l}^+} + \frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\overline{\zeta_{k+q-1l}^+}} \right) \quad (q = \overline{1,4}). \quad (28)$$

Заменяя в этих соотношениях граничные значения t_k переменными z_k областей S_k , приходим к конформным отображениям

$$z_k = -(\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ + \overline{z_{k+q-1l}} + \overline{R_{k+q-1l}} \left(\overline{\zeta_{k+q-1l}^+} + \frac{\overline{m_{k+q-1l}}}{\overline{\zeta_{k+q-1l}^+}} \right) \quad (q = \overline{1,4}), \quad (29)$$

где переменная $\overline{\zeta}$ для лучшего восприятия заменена на ζ^+ , что подчеркивает ее происхождение от условий на границе L^+ .

Можно показать, что равенства (29) представляет собой конформные отображения внешности единичных кругов $|\zeta_{k+q-1l}^+| \geq 1$ на внешности контуров L_{k+q-1l}^+ верхней (относительно границы L_k^+) полуплоскости S_k^+ переменной z_k . Например, в случае ортотропной полуплоскости, когда комплексные параметры являются чисто мнимыми ($\mu_k = i\beta_k$), это будут эллипсы L_{k+q-1l}^+ симметричные эллипсам L_{k+q-1l} полуплоскостей S_k , где заданы исходные комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$. Следовательно, функции $\Phi_{k+q-1l}^+(z_k)$ являются функциями, голоморфными вне контуров L_{k+q-1l}^+ верхних полуплоскостей S_k^+ (а следовательно, они голоморфны в нижних полуплоскостях S_k) и для них имеют место разложения в ряды Лорана вида

$$\Phi_{k+q-1l}^+(z_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_{k+q-1ln}} \Phi_{k+q-1ln}^+(z_k), \quad (30)$$

где

$$\Phi_{k+q-1ln}^+(z_k) = \frac{1}{\left(\overline{\zeta_{k+q-1l}^+} \right)^n},$$

$\overline{\zeta_{k+q-1l}^+}$ – переменные, определяемые из конформных отображений (29).

Исходя из указанных свойств входящих в условия (26) функций, умножив обе

части этих условий на ядро Коши $\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t - z_k}$ и вычислив интегралы типа Коши от них по бесконечной прямой L_k^+ , получим

$$\Phi_{k0}(z_k) = \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c^+}^{d^+} \frac{f_i^+(t) dt}{t - z_k} - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N_{k+q-1}} \left(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) - \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{\Phi_{k+q-1l}} \left(t_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right).$$

Подставив это значение функции $\Phi_{k0}(z_k)$ в (13), для комплексных потенциалов получим

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c^+}^{d^+} \frac{f_i^+(t) dt}{t - z_k} + \Gamma_k z_k + N_k(t_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N_{k+q-1}} \left(z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\Phi_{kl}(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{\Phi_{k+q-1l}} \left(z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) \right],$$

а затем на основе разложений (30) будем иметь выражения

$$\Phi_k(z_k) = F^+(z_k) + \Gamma_k z_k + N_k(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N_{k+q-1}} \left(z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{kln} \Phi_{kln}(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} a_{k+q-1ln} \Psi_{k+q-1ln}(z_k) \right], \quad (31)$$

в которых

$$F^+(z_k) = \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} \frac{1}{2\pi i} \int_{c^+}^{d^+} \frac{f_i^+(t) dt}{t - z_k},$$

$$\Phi_{kln}(z_k) = \frac{1}{\zeta_{kl}^n}, \quad \Psi_{k+q-1ln}(z_k) = \frac{1}{\left(\zeta_{k+q-1l}^+ \right)^n}. \quad (32)$$

Функции (31) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе и содержат неизвестные коэффициенты рядов Лорана a_{kln} . Для определения этих коэффициентов используем граничные условия (6) на контурах отверстий, предварительно продифференцировав их, чтобы исключить входящие в их правые части неизвестные аддитивные постоянные. Имеем

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 g_{ikl} \Phi'_k(t_k) = \frac{df_{il}(t)}{ds}, \quad (33)$$

где

$$\Phi'_k(z_k) = F'^+(z_k) + \Gamma'_k + N'_k(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N'_{k+q-1}} \left(z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \Psi'_{k+q-1ln}(z_k) \overline{a_{k+q-1ln}} \right]; \quad (34) \\
 N'_k(z_k) &= \sum_{r=1}^R \frac{A_{kr}^0}{z_k - z_{kr}}, \\
 \Phi'_{kln}(z_k) &= - \frac{n}{\zeta_{kl}^{n-1} R_{kl} (\zeta_{kl}^2 - m_{kl})}, \\
 \Psi_{k+q-1ln}^+(z_k) &= - \frac{n}{\left(\zeta_{k+q-1l}^+ \right)^{n-1} \overline{R_{k+q-1l}} \left(\left(\zeta_{k+q-1l}^+ \right)^2 - \overline{m_{k+q-1l}} \right)} \quad (q = \overline{1, 4}). \quad (35)
 \end{aligned}$$

Функции (34) точно удовлетворяют граничным условиям на прямолинейной границе L^+ . Граничные же условия на контурах отверстий L_l ($l = \overline{1, \mathcal{L}}$) будем использовать для определения неизвестных постоянных a_{kln} ($k = \overline{1, 4}$; $l = \overline{1, \mathcal{L}}$, $n = 1, 2, \dots$). Этим граничным условиям (33) на контурах отверстий будем удовлетворять обобщенным методом наименьших квадратов [9–11]. Для этого выберем на каждом из контуров L_p области S систему точек $M_{pm}(x_{pm}, y_{pm})$ ($p = \overline{1, \mathcal{L}}$, $m = \overline{1, M_p}$), в которых удовлетворим соответствующим граничным условиям, подставив в них функции (34). Тогда для определения неизвестных постоянных a_{kln} получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 & 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} g_{ikp} \delta_{k,s} \left[\Phi'_{kln}(t_{kpm}) a_{kln} - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \Psi'_{k+q-1ln}(t_{kpm}) \overline{a_{k+q-1ln}} \right] = \\
 & = F'^+(t_{kpm}) - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\Gamma_k + N'_k(t_{kpm}) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N'_{k+q-1}}(t_{kpm} + (\mu_{k+q-1} - \mu_k) h^+) \right] \\
 & \quad (i = \overline{1, 4}; p = \overline{1, \mathcal{L}}; m = \overline{1, M_p}). \quad (36)
 \end{aligned}$$

Систему (36) будем решать с использованием сингулярных разложений [13, 14]. После нахождения псевдорешений этой системы постоянные a_{kln} , а следовательно и функции $\Phi_k(z_k)$, будут известными и по ним можно вычислять основные характеристики ЭМУС (напряжения, компоненты векторов индукций и напряженностей, перемещения и потенциалы поля), а в случае трещин и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). В частности, для основных напряжений и компонент векторов индукций и напряженностей имеют место формулы [5]

$$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\mu_k^2, 1, -\mu_k) \Phi'_k(z_k); \quad (37)$$

$$(D_x, D_y, E_x, E_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (v_k \mu_k, -v_k, r_k, \mu_k r_k) \Phi'_k(z_k); \quad (38)$$

$$(B_x, B_y, H_x, H_y) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 (\rho_k \mu_k, -\rho_k, h_k, \mu_k h_k) \Phi'_k(z_k). \quad (39)$$

По основным напряжениям и компонентам векторов индукций можно найти также напряжения и компоненты векторов индукции и напряженностей на любых площадках с нормалью n и касательной s , используя формулы [5, 15, 16]

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \sigma_s &= \sigma_x \cos^2(ny) + \sigma_y \cos^2(nx) - 2\tau_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \tau_{ns} &= (\sigma_y - \sigma_x) \cos(nx) \cos(ny) + \tau_{xy} (\cos^2(nx) - \cos^2(ny)); \\ D_n &= D_x \cos^2(nx) + D_y \cos^2(ny), \\ B_n &= B_x \cos^2(nx) + B_y \cos^2(ny).\end{aligned}\tag{40}$$

При необходимости можно вычислить и деформации [15, 16]

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \varepsilon_x \cos^2(nx) + \varepsilon_y \cos^2(ny) + \gamma_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \varepsilon_s &= \varepsilon_x \cos^2(ny) + \varepsilon_y \cos^2(nx) - \gamma_{xy} \cos(nx) \cos(ny), \\ \gamma_{ns} &= 2(\varepsilon_y - \varepsilon_x) \cos(nx) \cos(ny) + \gamma_{xy} (\cos^2(nx) - \sin^2(ny)).\end{aligned}\tag{42}$$

Что же касается КИН, они также находятся по известным функциям с использованием формул [17]

$$\begin{aligned}k_1^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[\mu_k^2 \sin^2 \varphi_l + \cos^2 \varphi_l + 2\mu_k \sin \varphi_l \cos \varphi_l \right] M_{kl}, \\ k_2^\pm &= 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[(1 - \mu_k^2) \cos \varphi_l \sin \varphi_l - \mu_k (\cos^2 \varphi_l - \sin^2 \varphi_l) \right] M_{kl},\end{aligned}\tag{43}$$

где

$$M_{kl} = -\frac{\sqrt{a_l}}{2R_{kl}} \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n n a_{kln}.\tag{44}$$

Здесь верхний знак соответствует правому концу разреза в локальной системе координат $O_l x_l y_l$, нижний – к его левому концу.

Как частные случаи из приведенного решения задачи электромагнитоупругости (ЭМУ) следуют решения задач электроупругости (ЭУ), магнитоупругости (МУ) и теории упругости (ТУ). Эти решения получаются из приведенного решения, если в нем принять равными нулю соответственно p_{ki} , v_{ki} (в задаче ЭУ), g_{ki} , v_{ki} (в задаче МУ) или и те и другие (в задаче ТУ). Но для проведения численных исследований во всех этих случаях можно пользоваться программой решения общей задачи электромагнитоупругости, проводя вычисления для модельного материала с постоянными

$$g'_{ki} = \lambda_g g_{ki}, \quad p'_{ki} = \lambda_p p_{ki}, \quad v'_{ki} = \lambda_{gp} v_{ki},\tag{45}$$

где λ_g , λ_p , λ_{gp} – пьезопараметры модельного материала. При этом для задач ЭМУ нужно принять $\lambda_g = \lambda_p = \lambda_{gp} = 1$, а для других задач, как следует из вычислительных экспериментов, эти параметры нужно принять такими: $\lambda_g = 1$, $\lambda_p = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ЭУ; $\lambda_p = 1$, $\lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач МУ; $\lambda_p = \lambda_g = \lambda_{gp} \leq 10^{-3}$ для задач ТУ.

Приведенное общее решение задачи несколько упрощается для частных случаев. Так, в случае сплошной полуплоскости (отверстия отсутствуют) комплексные потенциалы (31) будут такими:

$$\Phi_k(z_k) = F^+(z_k) + \Gamma_k z_k + N_k(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N_{k+q-1}} \left(z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right). \quad (46)$$

Если в сплошной полуплоскости внешние воздействия приложены лишь на бесконечности (а они могут быть только σ_x^∞ , D_x^∞ , B_x^∞), то

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k,$$

где Γ_k – постоянные, определяемые из решения системы (14), (15).

Если в сплошной полуплоскости усилия действуют лишь на отрезке $[c^+, d^+]$ границы, например, в виде силового давления $\sigma_y = p$, то

$$\Phi_k(z_k) = \frac{p}{2\pi i} \sum_{i=1}^4 \frac{M_{ik}}{\Delta_k} \ln \frac{z_k - d^+}{z_k - c^+}.$$

Если в сплошной полуплоскости действуют сосредоточенные воздействия в точке $z_0(x_0, y_0)$, то

$$\Phi_k(z_k) = N_k(z_k) - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{N_{k+q-1}} \left(z_k + (\overline{\mu_{k+q-1}} - \mu_k) h^+ \right),$$

где

$$N_k(z_k) = A_{k1}^0 \ln(z_k - z_{k1}^0).$$

Если имеет место полуплоскость с отверстиями и воздействия приложены лишь на бесконечности, то в (31) нужно принять $F^+(z_k) = 0$, $N_k(z_k) = 0$, и комплексные потенциалы примут вид

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{l=1}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\Phi'_{kln}(z_k) a_{kln} - \sum_{q=1}^4 \overline{r_{kk+q-1}} \overline{\Psi'_{k+q-1ln}(z_k)} \overline{a_{k+q-1ln}} \right]. \quad (47)$$

2. Описание результатов численных исследований для полуплоскости с отверстиями и трещинами. Проведены численные исследования напряженно-деформированного состояния пьезополуплоскости из следующих материалов: композит на основе $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ (материал М1) [18, 19]; композит, упругие и электрические постоянные которого соответствуют кадмию селениду $CdSe$, а пьезомагнитные и магнитные – $BaTiO_3$ (М2) [20]; композит, упругие, пьезоэлектрические и электрические постоянные которого соответствуют $PZT-4$, а пьезомагнитные и магнитные – $CoFe_2O_4$ –(М3) [20].

В численных исследованиях количество членов в рядах (47) для каждого отверстия L_p и количество точек M_p на этом контуре, для которых составлялись уравнения (36), увеличивалось до тех пор, пока граничные условия на контурах не удовлетворялись с достаточно высокой степенью точности (пока значения напряжений на площадках, касательных к контурам, не были менее 10^{-3}). В описываемых ниже случаях для такого удовлетворения граничным условиям необходимо было в указанных рядах оставлять от 10 до 100 членов, и на каждом из контуров брать от 100 до 500 «коллокационных точек».

В табл. 1 для растяжения усилиями $\sigma_x^\infty = p$ полуплоскости с круговым отверстием радиуса a_1 (рис. 2) с точностью до множителя p приведены значения напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c/a_1 , где c – длина перемычки между контуром отверстия и прямолинейной границей. При этом характерными были точки $A(0, -a_1)$, $B(a_1, 0)$, $C(0, a_1)$, $D(0, a_1 + c/2)$, $E(0, a_1 + c)$, $L(a_1, a_1 + c)$, $M(2a_1, a_1 + c)$. При этом для некоторых точек

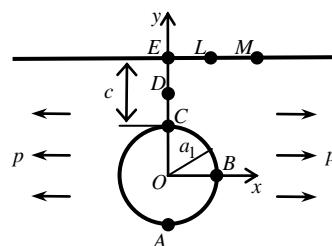


Рис. 2

Таблица 1
Значения напряжений в некоторых точках полуплоскости с круговым отверстием в зависимости от c/a_1

Материал	Точка	Величина	Задача	c/a_1						
				∞	2	1	0,5	0,1	0,01	
М1	A	σ_x	ЭМУ	3,111	3,223	3,327	3,459	3,76	4,01	
			ТУ	3,019	3,129	3,231	3,358	3,65	3,88	
	B	σ_y	ЭМУ	-0,957	-1,080	-1,156	-1,162	-0,82	-0,34	
			ТУ	-1,027	-1,162	-1,243	-1,245	-0,87	-0,35	
	C	σ_x	ЭМУ	3,111	3,369	3,834	4,750	9,44	29,18	
			ТУ	3,019	3,279	3,744	4,654	9,26	28,41	
	D	σ_x	ЭМУ	1,000	1,242	1,566	2,101	4,57	14,53	
			ТУ	1,000	1,245	1,570	2,100	4,51	14,17	
	E	σ_x	ЭМУ	1,000	0,812	0,649	0,490	0,21	0,05	
			ТУ	1,000	0,808	0,646	0,492	0,23	0,07	
	L	σ_x	ЭМУ	1,000	1,056	1,475	2,196	2,67	1,14	
	M	σ_x	ЭМУ	1,000	1,268	1,513	1,474	0,83	0,24	
	М2	A	σ_x	ЭМУ	3,943	4,056	4,167	4,320	4,71	5,08
				ТУ	2,778	2,884	2,979	3,094	3,35	3,55
B		σ_y	ЭМУ	-1,095	-1,318	-1,453	-1,508	-1,13	-0,45	
			ТУ	-1,228	-1,398	-1,491	-1,477	-1,00	-0,39	
C		σ_x	ЭМУ	3,943	4,221	4,712	5,686	10,88	33,54	
			ТУ	2,778	3,042	3,508	4,397	8,75	26,36	
D		σ_x	ЭМУ	1,000	1,246	1,563	2,099	4,76	16,33	
			ТУ	1,000	1,252	1,579	2,095	4,36	13,19	
E		σ_x	ЭМУ	1,000	0,811	0,683	0,560	0,17	-0,27	
			ТУ	1,000	0,801	0,643	0,503	0,28	0,12	
L		σ_x	ЭМУ	1,000	1,111	1,518	2,247	3,15	1,49	
M		σ_x	ЭМУ	1,000	1,258	1,473	1,548	1,03	0,36	
М3		A	σ_x	ЭМУ	3,199	3,311	3,417	3,549	3,86	4,13
				ТУ	2,377	2,481	2,566	2,663	2,86	3,01
	B	σ_y	ЭМУ	-0,829	-0,920	-0,974	-0,971	-0,69	-0,30	
			ТУ	-1,205	-1,327	-1,375	-1,321	-0,85	-0,33	
	C	σ_x	ЭМУ	3,199	3,454	3,909	4,820	9,61	30,09	
			ТУ	2,377	2,640	3,085	3,927	7,96	23,70	
	D	σ_x	ЭМУ	1,000	1,233	1,557	2,100	4,62	14,98	
			ТУ	1,000	1,237	1,581	2,093	4,14	11,95	
	E	σ_x	ЭМУ	1,000	0,837	0,667	0,496	0,23	0,05	
			ТУ	1,000	0,824	0,641	0,486	0,38	0,21	
	L	σ_x	ЭМУ	1,000	1,034	1,441	2,165	2,70	1,18	
	M	σ_x	ЭМУ	1,000	1,256	1,529	1,514	0,87	0,25	

приведены значения напряжений при решении задач ЭМУ и ТУ. На рис. 3 для некоторых значений c/a_1 , в зависимости от центрального угла θ , отсчитываемого от оси Ox против часовой стрелки, для слабо и сильно анизотропных и пьезоактивных материалов М1 и М2 изображены графики распределения по контуру отверстия нормальных напряжений σ_s/p на площадках, перпендикулярных контуру, а на рис. 4 для некоторых значений c/a_1 даны графики распределения σ_x/p вдоль прямолинейной границы, причем сплошные и штриховые линии рисунков относятся к полуплоскости из М1 и М2 соответственно.

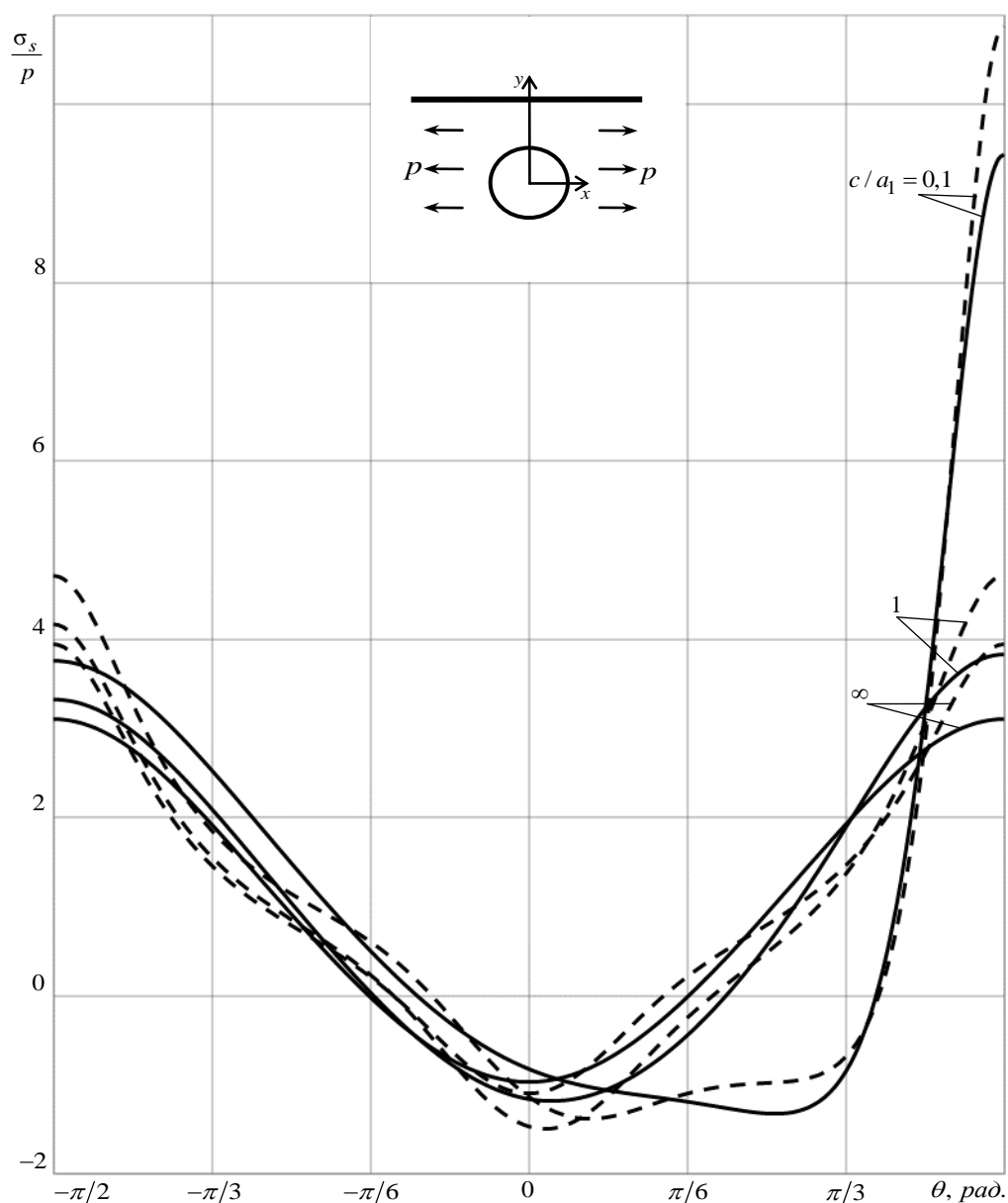


Рис. 3. Графики распределения напряжений σ_s/p около контура кругового отверстия в полуплоскости для некоторых значений c/a_1 . Сплошные линии относятся к материалу М1, штриховые – к материалу М2

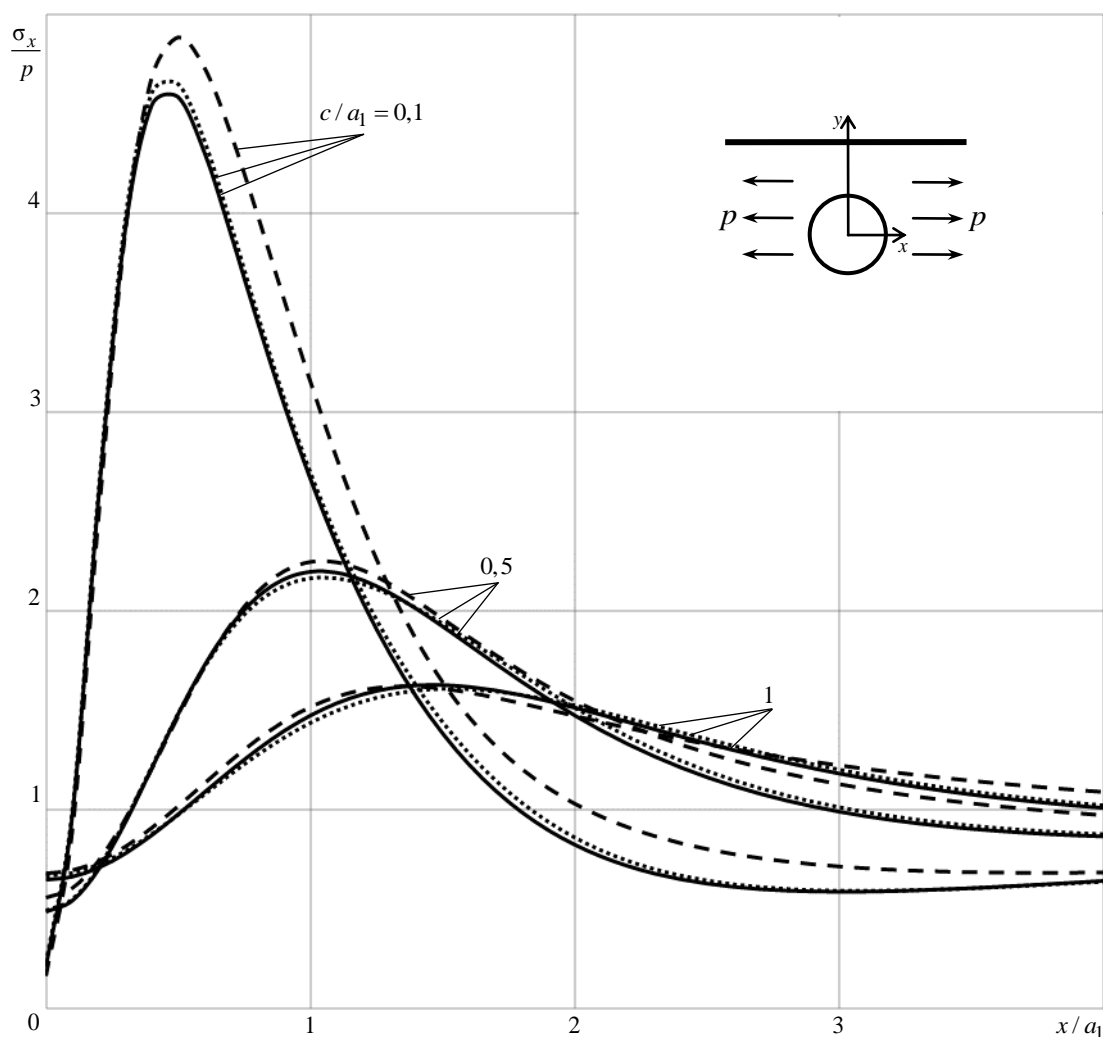


Рис. 4. Графики распределения σ_x / p по отрезку прямолинейной границы в полуплоскости с круговым отверстием для некоторых значений c / a_1 . Сплошные, штриховые и пунктирные линии относятся к полуплоскости из материалов М1, М2, М3 соответственно.

Как следует из табл. 1, рис. 3, рис. 4, с приближением отверстия к прямолинейной границе полуплоскости происходит резкое увеличение значений напряжений около контура отверстия и в зоне между отверстием и прямолинейной границей, за исключением весьма малой окрестности точки перемычки на прямолинейной границе, где эти напряжения и их изменения невелики. Значения напряжений в указанных точках особенно велики в полуплоскости из материала М2. В точках высокой концентрации напряжений велика и доля пьезосвойств на значения напряжений.

В табл. 2 для растяжения полуплоскости наиболее пьезоактивного материала М2 с вертикальной трещиной длины $2l_1$ усилиями $\sigma_x^\infty = p$ (рис. 5) с точностью до множителя p приведены значения КИН k_1 (в этом случае $k_2 = 0$) для концов трещины А, С и напряжений в некоторых характерных точках полуплоскости в зависимости от отношения c / l_1 , где c – длина перемычки между трещиной и границей полуплоскости. При

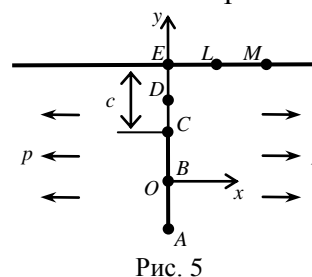


Рис. 5

этом характерными точками были $D(0, l_1 + c/2)$, $E(0, l_1 + c)$, $L(l_1, l_1 + c)$, $M(2l_1, l_1 + c)$.

Таблица 2
Значения КИН и напряжений в некоторых точках полуплоскости из М2 с вертикальной трещиной в зависимости от c/l_1

Точка	Величина	c/l_1					
		∞	2	1	0,5	0,1	0,01
A	k_1^-	1,000	1,018	1,041	1,075	1,173	1,28
B	σ_y	-1,095	-1,128	-1,169	-1,224	-1,254	-1,03
C	k_1^+	1,000	1,025	1,068	1,158	1,644	3,39
D	σ_x	1,000	1,199	1,470	2,000	5,495	33,51
E	σ_x	1,000	1,016	1,040	1,090	1,431	4,34
L	σ_x	1,000	1,155	1,403	1,668	1,594	1,02
M	σ_x	1,000	1,144	1,229	1,226	0,922	0,62

Как следует из данных табл. 2, при приближении вертикальной трещины к границе полуплоскости значения напряжений в точках перемычки и КИН для ближайшей к границе полуплоскости резко растут. При этом незначительно растут также КИН для удаленного конца трещины и напряжения в точках вблизи перемычки.

Указанные закономерности изменения КИН и напряжений несколько изменяются в случаях, когда трещина наклонена к границе полуплоскости. В табл. 3 для растяжения полуплоскости с наклоненной под углом φ_1 к границе полуплоскости трещиной длины $2l_1$ усилиями $\sigma_x^\infty = p$ (рис. 6) с точностью до множителя p приведены значения КИН (k_1 и k_2) для концов A, C трещины и напряжений в тех же точках, что и в табл. 2,

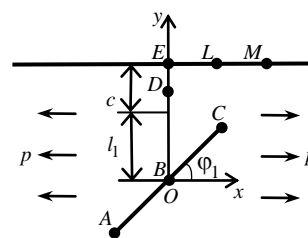


Рис. 6

Таблица 3
Значения КИН и напряжений σ_x в точках полуплоскости с наклонной трещиной в зависимости от угла наклона φ_1 в случае $c/l_1 = 0,1$

Точка	Величина	φ_1			
		0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
A	k_1^-	0	0,329	0,890	1,173
	k_2^-	0	0,424	0,399	0,000
B	σ_y	0	0,040	-0,397	-1,254
C	k_1^+	0	0,229	0,953	1,644
	k_2^+	0	0,501	0,612	0,000
D	σ_x	1	1,387	2,787	5,495
E	σ_x	1	1,366	2,647	1,431
L	σ_x	1	1,402	2,000	1,594
M	σ_x	1	1,160	1,047	0,922

для случая $c/l_1 = 0,1$. Как видно, с ростом угла φ_1 значения КИН k_1 и напряжений растут, тогда как k_2 и значения k_3 убывают. При $\varphi_1 = 0$ значения КИН равны нулю, а напряжения такие же, как в сплошной полуплоскости ($\sigma_x = p$, $\sigma_y = 0$). Следовательно, наличие в полуплоскости трещины, параллельной ее прямолинейной границе, не влияет на напряженное состояние полуплоскости.

Выводы. Таким образом, с использованием комплексных потенциалов плоской задачи электромагнитоупругости решена задача об ЭМУС пьезополуплоскости с внутренними отверстиями и трещинами при произвольных их количестве, конфигурации и взаиморасположении. При этом граничные условия на прямолинейной границе методом интегралов типа Коши удовлетворяются точно, и вся задача сводится к получаемой из граничных условий на контурах отверстий и трещин обобщенным методом наименьших квадратов переопределенной системе линейных алгебраических уравнений, решаемой методом сингулярного разложения. Описаны результаты численных исследований распределения напряжений в полуплоскости с круговым отверстием или трещиной, с установлением закономерностей влияния геометрических характеристик отверстия и трещины, их взаиморасположения, а также упругих и пьезосвойств материалов на значения напряжений и их концентрацию.

Работа выполнена по теме государственного задания (номер госрегистрации 124012400354-0).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение. – М.: Иностран. лит., 1949. – 717 с.
2. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // Физическая акустика / Под ред. У. Мэзона. – М.: Мир, 1966. – Т. 1, ч. А. – С. 204–326.
3. Магнитоэлектрические материалы / М.И. Бичурин, В.М. Петров, Д.А. Филиппов и др. – М.: Изд-во «Академия Естественных наук», 2006. – 296 с.
4. Пятаков А.П. Магнитоэлектрические материалы и их практическое применение // Бюллетень МАГО. – 2006. – Т. 5, № 2. – С. 1–3.
5. Калоеров С.А., Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
6. Калоеров С.А. Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2, № 10. – С. 75–82.
7. Калоеров С.А., Авдюшина Е.В. Решение основных задач теории упругости для многосвязной анизотропной полуплоскости // Теорет. и прикладная механика. – 1997. – Вып. 27. – С. 44–63.
8. Калоеров С.А., Глушанков Е.С., Мироненко А.Б. Решение задач теории упругости для многосвязных полуплоскости и полосы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2023. – № 4. – С. 23–37.
9. Калоеров С.А., Паршикова О.А. Термовязкоупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. – 2012. – № 3 (48). – С. 103–116.
10. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
11. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
12. Калоеров С.А., Горянская Е.С. Двумерное напряженное состояние многосвязного анизотропного тела с полостями и трещинами // Теорет. и прикладная механика. – 1995. – № 25. – С. 45–56.
13. Drmač Z., Veselić K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 1 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1322–1342.
14. Drmač Z., Veselić K. New fast and accurate Jacobi SVD algorithm. 2 // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 29, No. 4. – P. 1343–1362.
15. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
16. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
17. Калоеров С.А. Определение коэффициентов интенсивности напряжений, индукции и напряженности для многосвязных сред // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 56–62.

18. Yamamoto Y., Miya K. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. – Amsterdam: Elsevier Science-North Holland, 1987. – 450 p.
19. Tian W.-Y., Gabbert U. Multiple crack interaction problem in magneto-electroelastic solids // Europ. J. Mech. Part A. – 2004. – Vol. 23. – P. 599–614.
20. Hou P.F., Teng G.-H., Chen H.-R. Three-dimensional Greens function for a point heat source in two-phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Mater. – 2009. – Vol. 41. – P. 329–338.

Поступила в редакцию 20.08.2024 г.

SOLUTION OF THE ELECTROMAGNETOELASTICITY PROBLEM FOR A HALF-PLANE WITH HOLES AND CRACKS

S. A. Kaloerov, M. A. Polianskii, A. V. Seroshtanov

The problem of electromagnetic elasticity for a piezoelectric half-plane with arbitrarily located internal elliptical holes and rectilinear cracks is solved. In this case, functions holomorphic outside the ellipses (cracks) are expanded in Laurent series in negative powers of the corresponding variables, and functions holomorphic in the lower half-planes are expressed by the Cauchy integral method through functions obtained from the specified ones when satisfying the boundary conditions on the rectilinear boundary. With this approach, the boundary conditions on the rectilinear boundary of the half-plane are satisfied exactly. As for the boundary conditions on the contours of the holes, a generalized least squares method is used to satisfy them, reducing the problem to solving an overdetermined system of linear algebraic equations with respect to the coefficients of the Laurent series. Solutions to problems of electroelasticity, magnetoelasticity and elasticity theory are obtained as special cases, as well as analytical solutions to problems of a continuous half-plane under the action of forces on the boundary or concentrated effects at individual points. The results of numerical studies for a half-plane with holes and cracks are described, with the establishment of patterns of change in the stress-strain state of the half-plane depending on its materials, geometric characteristics of holes and cracks.

Keywords: electromagnetoelastic plate, half-plane, holes, complex potentials, Cauchy-type integrals, generalized least squares method.

Калоеров Стефан Алексеевич

доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского, главный научный сотрудник ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: kaloerov@mail.ru

Kaloerov Stefan Alekseevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor; Professor of the Department of Theory Elasticity and Computational Mathematics named after acad. A.S. Kosmodamiansky, Chief researcher, Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

Полянский Максим Алексеевич

аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского, стажер-исследователь ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: m4xpolyan@yandex.ru

Polianskii Maksim Alekseevich

Postgraduate student of the Department of Elasticity Theory and Computational Mathematics named after acad. A.S. Kosmodamiansky, Intern researcher, Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.

Сероштанов Александр Владимирович

аспирант кафедры теории упругости и вычислительной математики им. акад. А.С. Космодамианского, младший научный сотрудник ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», г. Донецк, ДНР, РФ.
E-mail: aleks.serosht@gmail.com

Seroshtanov Aleksandr Vladimirovich

Postgraduate student of the Department of Elasticity Theory and Computational Mathematics named after acad. A.S. Kosmodamiansky, Junior Researcher; Donetsk State University, Donetsk, DPR, RF.