

## О СПЕКТРЕ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ В РЕШЕНИИ ДВУХГРУППОВОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ПОСТОЯННЫМ ЯДРОМ

© 2024. *В.В. Сушков*

Рассмотрена задача построения собственных значений и собственных функций при решении векторного двухгруппового уравнения переноса с постоянным ядром. Описаны узловые точки исследования: поиск собственных функций непрерывного спектра в множестве обобщенных функций и определение коэффициентов непрерывного спектра посредством аппарата краевых задач комплексного анализа. Выделены непрерывный и дискретный спектр. В случае вырожденной матрицы рассеяния показана сводимость задачи к рассмотрению скалярного случая, определена структура собственных функций в зависимости от свойств матрицы переноса. В невырожденном случае определен набор собственных функций непрерывного спектра, построена структура решения граничной задачи в случае, когда бесконечно удаленная точка является двукратной точкой дискретного спектра, доказательство приведено для частного случая треугольной матрицы рассеяния. Описан алгоритм доказательства теоремы о полноте множества собственных функций и построения решения граничных задач.

**Ключевые слова:** граничные задачи, собственные значения и собственные функции дискретного и непрерывного спектра, обобщенные функции, краевая задача Римана, уравнение переноса, векторное уравнение.

**Введение.** Поиск собственных значений и собственных функций является одним из важнейших инструментов исследования задач кинетической теории газа и плазмы и теории переноса нейтронов как при использовании аналитических, так и численных методах решения. Свойства собственных значений и собственных функций определяют как факт разрешимости задачи в рамках рассматриваемой модели, так и свойства решения. Их построение эффективно в случае доказательства теорем полноты, однако в случае упомянутых классов задач недостаточная мощность множества собственных функций не позволяет применять их к решению конкретных задач. Принципиально проблема была решена К. Кейзом, предложившим искать собственные функции в том числе в виде сингулярных обобщенных собственных функций в работе [1] о скалярном уравнении переноса нейтронов

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, \mu) + \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} C \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu'.$$

Предложенная идея через два года получила свое развитие в области кинетической теории в работе К. Черчиньяни [2] для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} Y(x, \mu) + Y(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y(x, \mu') e^{-\mu'^2} d\mu'.$$

В этом случае общая задача разбивается на две части: 1) определение структуры функций (в том числе обобщенных), решающих задачу на собственные значения, 2) доказательство полноты построенного набора в некотором функциональном пространстве, что даёт впоследствии возможность получения решений конкретных граничных задач, позволяет получать удобные результаты в части разработки новых методов аппроксимации, строить единую теорию получения аналитических решений граничных задач.

При этом доказательство полноты традиционно опирается на исследование краевых задач Римана [3], в силу чего наибольшее развитие получили алгоритмы сведения исходного уравнения к скалярному – именно они преимущественно используются до сих пор: как в теории переноса [4–6], так и в кинетической теории (при построении аналитических решений [7] и в применении приближенных методов [8]). Сложность исследования векторно-матричных моделей обусловлена как более сложной структурой собственных функций, так и необходимостью решения векторно-матричных задач Римана для определения коэффициентов разложения.

И по настоящий момент зачастую исследование технических аспектов (см., например, [9]) векторных задач представляет собой нетривиальную задачу. Только в работах [10–11] Siewert С.Е. и Kelley С.Т., посвященных уравнению БГК для случая одноатомного газа и уравнению переноса, были построены матрица канонических решений соответствующей задачи Римана, при этом важно отметить, что непосредственное её применение для построения аналитического решения конкретных задач удалось позже, когда А.В. Латышев и А.А. Юшканов [12] развили метод фундаментальной матрицы решений векторно-матричной краевой задачи Римана, получив в итоге результаты для матричной задачи в случае уравнения БГК для одноатомного газа. Предложенный ими подход был применен впоследствии при разработке ряда методов (например, в [13]) при построении аналитических решений кинетических уравнений для векторных моделей, однако в теории переноса исследование векторных случаев встречается значительно реже (см., например, [14–15]). В то же время определенная родственность математических моделей в рамках обеих теорий представляет возможность провести исследование набора собственных функций и собственных значений для случая векторного уравнения переноса ранее полученными методами.

#### **Собственные функции векторного уравнения. Вырожденный случай.**

Рассмотрим векторное двухгрупповое односкоростное уравнение теории переноса в плоской геометрии с постоянным ядром:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, \mu) + \Sigma \Psi(x, \mu) = \frac{1}{2} C \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu') d\mu', \quad (1)$$

где  $x > 0$ ,  $\mu \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ .  $\Psi(x, \mu): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  – неизвестная вектор-функция с компонентами  $\psi_1(x, \mu)$ ,  $\psi_2(x, \mu)$ ,  $\Sigma$  и  $C$  – известные вещественные матрицы, причем

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}, \text{ где } \sigma_1 \neq \sigma_2, \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

$\Sigma$  называется матрицей переноса, а  $C$  – матрицей рассеяния, причем  $c_{ij} > 0$ , при  $i, j = 1, 2$ . Фактически задача может рассматриваться безотносительно физической составляющей, как задача об исследовании класса векторных интегродифференциальных уравнений, однако будем использовать устоявшуюся терминологию.

Предположим, что матрица  $C$  – вырождена. Тогда она представляется в виде

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ kc_{11} & kc_{12} \end{bmatrix},$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности (очевидно,  $k > 0$ ).

Представим уравнение (1) в виде системы уравнений относительно функций-компонент

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x, \mu) + \sigma_1 \psi_1(x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (c_{11} \psi_1(x, \mu') + c_{12} \psi_2(x, \mu')) d\mu',$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(x, \mu) + \sigma_2 \psi_2(x, \mu) = \frac{k}{2} \int_{-1}^1 (c_{11} \psi_1(x, \mu') + c_{12} \psi_2(x, \mu')) d\mu'.$$

Введя в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$\psi_0(x, \mu) = c_{11} \psi_1(x, \mu) + c_{12} \psi_2(x, \mu),$$

придем к уравнению

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_0(x, \mu) + \sigma_0 \psi_0(x, \mu) = \frac{c_{11} + kc_{12}}{2} \int_{-1}^1 \psi_0(x, \mu') d\mu', \quad (2)$$

где коэффициент

$$\sigma_0 = c_{11} \sigma_1 + c_{12} \sigma_2.$$

Для определения множества собственных функций разделим переменные в уравнении (2):

$$\psi_0(x, \mu) = \varphi(\eta, \mu) e^{-\frac{x}{\eta}},$$

и придем к характеристическому уравнению:

$$(\sigma_0 \eta - \mu) \varphi(\eta, \mu) = \frac{(c_{11} + kc_{12}) \eta}{2} \cdot n(\eta), \quad (3)$$

где  $n(\eta) = \int_{-1}^1 \varphi(\eta, \mu') d\mu'$  – нормировочный интеграл. Непосредственно вычисляя, при  $|\sigma_0 \eta| > 1$  получим

$$\varphi(\eta, \mu) = \frac{c_{11} + kc_{12}}{2} \cdot \frac{\eta}{\sigma_0 \eta - \mu} n(\eta), \quad (4)$$

что с учетом нормировки даёт уравнение

$$\eta \ln \left| \frac{1 + \sigma_0 \eta}{1 - \sigma_0 \eta} \right| = \frac{2}{c_{11} + kc_{12}},$$

определяющее собственные значения характеристического уравнения (3), называемые собственными значениями **дискретного спектра**. Рассмотрим функцию

$$f(\eta) = \eta \ln \left| \frac{1 + \sigma_0 \eta}{1 - \sigma_0 \eta} \right|.$$

Очевидно, что при  $\sigma_0 = 0$  функция  $f(\eta) \equiv 0$ . Далее будем считать, что  $\sigma_0 \neq 0$ .

**Свойство 1°.** Функция  $f(\eta)$  является четной и имеет единственный ноль:  $f(0) = 0$ .

**Свойство 2°.** Функция  $f(\eta)$  непрерывна на всей действительной оси за исключением точек  $\pm(1/\sigma_0)$ , причем:  $f(\eta) \rightarrow +\infty$  при  $\eta \rightarrow \pm(1/\sigma_0)$  в случае  $\sigma_0 > 0$  и :  $f(\eta) \rightarrow -\infty$  при  $\eta \rightarrow \pm(1/\sigma_0)$  в случае  $\sigma_0 < 0$ .

**Свойство 3°.** Функция  $f(\eta)$  в случае  $\sigma_0 > 0$  монотонно возрастает на промежутке  $(-\infty, -1/\sigma_0)$  и монотонно убывает на  $(1/\sigma_0, +\infty)$ , причем  $f(\eta) \rightarrow 2/\sigma_0$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . В случае  $\sigma_0 < 0$  функция  $f(\eta)$  монотонно убывает на промежутке  $(-\infty, -1/\sigma_0)$  и монотонно возрастает на  $(1/\sigma_0, +\infty)$ , причем  $f(\eta) \rightarrow 2/\sigma_0$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ .

Из приведенных свойств функции  $f(\eta)$  и ограничения  $|\sigma_0\eta| > 1$  получим следующее.

**Утверждение 1.** Дискретный спектр характеристического уравнения (3) содержит две точки  $\pm\eta_0$  в случае  $c_{11} + kc_{12} < \sigma_0$  и составляет пустое множество в ином случае.

Функции, определяемые равенством (4) при соответствующих значениях  $\pm\eta_0$ , называют собственными функциями дискретного спектра – обозначим их  $\varphi_{\pm}(\eta_0, \mu)$ :

$$\varphi_{\pm}(\eta_0, \mu) = \frac{c_{11} + kc_{12}}{2} \cdot \frac{\eta_0}{\sigma_0\eta_0 - \mu} n(\eta_0). \quad (5)$$

Предыдущие рассуждения проводились из расчета  $|\sigma_0\eta| > 1$  – в противоположном случае нормировочный интеграл  $n(\eta)$  расходится. **Непрерывный спектр**, как очевидно следует из (3), составляют все точки отрезка  $[-1/\sigma_0, 1/\sigma_0]$ . В этом случае при подстановке функций (4) в нормировочный интеграл  $n(\eta)$  получим, вообще говоря, расходящийся интеграл при всех значениях  $\eta \in [-1/\sigma_0, 1/\sigma_0]$ . Если допустить рассмотрение собственных функций уравнения (3) из класса обобщенных функций [1], то они будут соответствовать собственным значениям **непрерывного спектра**.

Из уравнения (3) с учетом нормировки в этом случае находим:

$$\varphi(\eta, \mu) = \left[ \frac{(c_{11} + kc_{12})\eta}{2} P \frac{1}{\sigma_0\eta - \mu} + \Lambda(\eta)\delta(\sigma_0\eta - \mu) \right] n(\eta), \quad (6)$$

где под  $P \frac{1}{x}$  понимается главное значение интеграла по Коши от  $x^{-1}$ ,  $\delta(x)$  – традиционно, дельта-функция Дирака, а

$$\Lambda(\mu) = 1 - \mu \frac{c_{11} + kc_{12}}{2} v. p. \int_{-1}^1 \frac{d\eta}{\sigma_0\eta - \mu}$$

известная вспомогательная функция, называемая в литературе дисперсионной. Интеграл, входящий в ее структуру, также понимается как интеграл в смысле главного значения по Коши.

Для упрощения записи можно принимать, что  $n(\eta) = 1$ . Таким образом, множество собственных функций уравнения (3) содержит континуальное множество функций непрерывного спектра (6) и – в случае, когда  $c_{11} + kc_{12} < \sigma_0$ , – две функции дискретного спектра (5).

Для построенных функций прямой подстановкой несложно получить результат:

**Свойство 4°.** Собственные функции (5) и (6) удовлетворяют соотношению:

$$\int_{-1/\sigma_0}^{1/\sigma_0} \mu \psi(\eta', \mu) \psi(\eta'', \mu) d\mu = 0 \text{ при } \eta' \neq \eta''.$$

Построенное множество собственных функций оказывается достаточно мощным для практического использования, которое базируется на доказательстве теорем полноты в классе функций, требуемых в рамках конкретной задачи – как правило, достаточным считается рассмотрение класса гильбертовых функций. Приведем пример такого результата.

**Теорема 1.** *Функции вида (5) и (6) составляют полную систему собственных функций характеристического уравнения (3) на пространстве функций, удовлетворяющих условию Гельдера на отрезке  $[-1/\sigma_0, 1/\sigma_0]$  и убывающих к нулю на бесконечности.*

Для доказательства достаточно показать представимость любой гельдеровой на отрезке  $[-1/\sigma_0, 1/\sigma_0]$  функции  $\phi(\mu)$  в виде

$$\phi(\mu) = \sum a_{\pm} \varphi_{\pm}(x, \mu) + \int_{-1/\sigma_0}^{1/\sigma_0} A(\eta) \varphi(\eta, \mu) d\eta.$$

В силу свойства 4° коэффициенты дискретного спектра  $a_{\pm}$  определяются автоматически:

$$a_{\pm} = \frac{1}{A_{\pm}} \int_{-1/\sigma_0}^{1/\sigma_0} \mu \phi(\mu) \varphi_{\pm}(\eta_0, \mu) d\mu = 0,$$

где  $A_{\pm} = \int_{-1/\sigma_0}^{1/\sigma_0} \mu \varphi_{\pm}^2(\eta_0, \mu) d\mu$ . Воспользовавшись явным видом обобщенной функции  $\varphi(\eta, \mu)$ , придем к интегральному уравнению относительно неизвестной функции  $A(\mu)$

$$\phi(\mu) - \sum a_{\pm} \varphi_{\pm}(x, \mu) = \frac{c_{11} + kc_{12}}{2} \int_{-\frac{1}{\sigma_0}}^{\frac{1}{\sigma_0}} \frac{\eta}{\sigma_0 \eta - \mu} A(\eta) d\eta + A(\mu) \Lambda(\mu), \text{ где } -\frac{1}{\sigma_2} < \mu < \frac{1}{\sigma_2}.$$

Заметим, что левая часть уравнения

$$\phi_0(\mu) = \phi(\mu) - \sum a_{\pm} \varphi_{\pm}(x, \mu)$$

представляет собой известную функцию. В соответствии с [3] введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$N(z) = v.p. \int_0^{\frac{1}{\sigma_0}} \frac{\eta A(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

(интеграл понимается в смысле главного значения по Коши), и с учетом разрывного характера обеих функций –  $N(\mu)$  и  $\Lambda(\mu)$  – при переходе через отрезок  $[-1/\sigma_0, 1/\sigma_0]$  действительной оси, сведем полученное равенство к краевой задаче Римана:

$$\Lambda^+(\mu)[- \phi_0(\mu) + N^+(\mu)] = \Lambda^-(\mu)[- \phi_0(\mu) + N^-(\mu)], \quad \text{где } -\frac{1}{\sigma_0} < \mu < \frac{1}{\sigma_0}.$$

Требование убывания к нулю функции  $\phi_0$  в окрестности бесконечно удаленной точки позволяет утверждать [3] о существовании решения краевой задачи и, соответственно, о существовании коэффициента непрерывного спектра. Это, в свою очередь, позволяет сделать вывод о справедливости утверждения о полноте построенного набора собственных функций.

Таким образом, получили, что множество собственных вектор-функций  $\Psi_{\eta}$  с компонентами  $\psi_1, \psi_2$  для векторного уравнения (1) в вырожденном случае и их свойства полностью определяются структурой множества собственных функций скалярного характеристического уравнения (3). Компоненты  $\psi_1(x, \mu), \psi_2(x, \mu)$ , зависящие от параметра  $\eta$ , находятся из систем уравнений

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_1(x, \mu) + \sigma_1 \psi_1(x, \mu) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\eta, \mu') e^{-\frac{x}{\eta}} d\mu', \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} \psi_2(x, \mu) + \sigma_2 \psi_2(x, \mu) &= \frac{k}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\eta, \mu') e^{-\frac{x}{\eta}} d\mu', \end{aligned}$$

$$c_{11}\psi_1(x, \mu) + c_{12}\psi_2(x, \mu) = \varphi(\eta, \mu')e^{-\frac{x}{\eta}},$$

с учетом граничных условий рассматриваемой задачи.

**Собственные функции в невырожденном случае.** Проанализируем структуру и свойства множества собственных функций задачи для уравнения (1) в случае невырожденной матрицы рассеяния, то есть при  $\det C \neq 0$ . Пусть далее для определенности в матрице переноса  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ . Будем искать решение уравнения с помощью анзаца Кейза: в виде  $\Psi_\eta(x, \mu) = \Phi(\eta, \mu)e^{-x/\eta}$ , где  $\eta$  – произвольное комплексное число. Тогда уравнение (1) преобразуется к уравнению относительно новой неизвестной вектор-функции  $\Phi(\eta, \mu)$ :

$$(\Sigma\eta - I\mu)\Phi(\eta, \mu) = \eta Cn(\eta). \quad (7)$$

Традиционно, под  $I$  понимается единичная матрица, а нормировочный вектор представляет собой момент нулевого порядка

$$n(\eta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu') d\mu'. \quad (8)$$

Векторные решения уравнения (8)  $\Phi(\eta, \mu)$  традиционно называются собственными функциями, а соответствующие им значения  $\eta$  – собственными значениями характеристического уравнения (7). При подстановке функции  $\Phi(\eta, \mu)$ , дающей решение (7),

$$\Phi(\eta, \mu) = (\Sigma\eta - I\mu)^{-1} \eta Cn(\eta)$$

в нормирующий вектор (8), получим расходящиеся интегралы. Следовательно, для построения решения необходимо регуляризовать вектор-функцию  $\Phi(\eta, \mu)$ , то есть определить линейный непрерывный функционал  $\Phi_\eta$ , совпадающий с функцией  $\Phi(\eta, \mu)$  всюду в комплексной плоскости за исключением случая  $\mu = \eta$ , при этом функция  $\Phi(\eta, \mu)$  будет пониматься как линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций.

Понимая  $\Phi(\eta, \mu)$  как обобщенную функцию, действующую по правилу

$$(\Phi_\eta, \phi(\mu)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|\eta - \mu| < \varepsilon} \phi(\mu) \Phi(\eta, \mu) d\mu,$$

получим в правой части выражения интеграл в смысле главного значения по Коши. Это определит частное решение задачи регуляризации функции  $\Phi(\eta, \mu)$ , общее же решение будет иметь вид

$$(\Phi_\eta, \phi(\mu)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|\eta - \mu| < \varepsilon} \phi(\mu) \Phi(\eta, \mu) d\mu + (g(\eta) \delta_\eta, \phi(\mu)),$$

где  $\delta_\eta$  – дельта-функция Дирака,  $g(\eta)$  – произвольная гельдерова функция параметра  $\eta$ .

Решая уравнение (7) покомпонентно, получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\eta, \mu) &= (c_{11}n_1(\eta) + c_{12}n_2(\eta)) \mathbf{P} \frac{1}{\sigma_1\eta - \mu} + g_1(\eta) \delta(\sigma_1\eta - \mu) \\ \Phi_2(\eta, \mu) &= (c_{21}n_1(\eta) + c_{22}n_2(\eta)) \mathbf{P} \frac{1}{\sigma_2\eta - \mu} + g_2(\eta) \delta(\sigma_2\eta - \mu), \end{aligned}$$

здесь, традиционно,  $\mathbf{P}x^{-1}$  – главное значение интеграла типа Коши,  $\delta(x)$  – известная дельта-функция Дирака,  $n_1(\eta)$  и  $n_2(\eta)$  – компоненты нормировочного вектора.

Подставляя полученные результаты в условие нормировки (8), получаем соотношение

$$(I + \eta T(\Sigma\eta)C)n(\eta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta(\sigma_1\eta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g(\eta).$$

где:

$$T(\Sigma z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T(\sigma_1 z) & 0 \\ 0 & T(\sigma_2 z) \end{bmatrix},$$

причем:

$$T(\sigma z) = v. p. \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu - \sigma z}.$$

Под  $\theta(x)$  традиционно понимается  $\theta$ -функция Хевисайда.

Как и в предыдущем случае, очевидно, что точки отрезка  $[-1/\sigma_2, 1/\sigma_2]$  будут составлять непрерывный спектр уравнения, которому отвечают собственные вектор-функции непрерывного спектра с компонентами  $\Phi_{1,2}(\eta, \mu)$  из пространства обобщенных функций.

Дисперсионной матрицей-функцией будем называть, как обычно,

$$\Lambda(z) = I + z T(\Sigma z)C.$$

Ее определитель  $\lambda(z) = \det \Lambda(z)$  будем называть дисперсионной функцией, а уравнение  $\lambda(z) = 0$  – дисперсионным уравнением.

Пусть  $S(z)$  – некоторая матрица, приводящая матрицу  $\Lambda(z)$  к жордановой нормальной форме. Обозначим

$$\Omega(z) = S^{-1}(z)\Lambda(z)S(z).$$

При этом очевидно, что  $\det \Omega(z) = \lambda(z)$ . Собственными значениями для матрицы-функции  $S(z)$  будут функции

$$\kappa_{1,2}(z) = 1 + \frac{z}{4}(c_{11}T(\sigma_1 z) + c_{22}T(\sigma_2 z)) \pm \frac{z}{4}r(z),$$

где

$$r(z) = \sqrt{(c_{11}T(\sigma_1 z) - c_{22}T(\sigma_2 z))^2 + 4c_{12}c_{21}T(\sigma_1 z)T(\sigma_2 z)}.$$

**Утверждение 2.** Матрица функция  $S(z)$  имеет точки ветвления в комплексной плоскости, причем на действительной оси – только  $z = 0$ , а в остальной части комплексной плоскости – не более чем счетное множество.

Кроме того, в силу своей структуры функция  $S(z)$  будет совершать скачок при переходе через основной разрез.

Исследование дисперсионной функции представляет собой одну из центральных проблем в решении задачи в целом (см., например, [9]). В нашем случае  $\lambda(z)$  также можно представить в явном виде:

$$\lambda(z) = 1 + \frac{z}{2}(c_{11}T(\sigma_1 z) + c_{22}T(\sigma_1 z)) + \frac{z^2}{4}T(\sigma_1 z)T(\sigma_2 z) \det C.$$

Общее число собственных значений дискретного спектра может быть определено с помощью принципа аргумента, при этом решениями дисперсионного уравнения могут быть как конечные значения, так и бесконечно удаленная точка. Проиллюстрируем, каким образом используются собственные функции и собственные значения

характеристического уравнения на примере случая, когда дисперсионная функция имеет двойной нуль на бесконечности, то есть бесконечность является двукратной точкой дискретного спектра.

**Утверждение 3.** Для дисперсионной функции  $\lambda(z)$  в окрестности бесконечно удаленной точки будет справедливо лорановское разложение:

$$\lambda(z) = \lambda_0 + \lambda_{-2}z^{-2} + \lambda_{-4}z^{-4} + \dots, \text{ при } |z| \rightarrow \infty,$$

причем

$$\lambda_0 = 1 - 2 \left( \frac{c_{11}}{\sigma_1} + \frac{c_{22}}{\sigma_2} \right) + \frac{4 \det C}{\sigma_1 \sigma_2}.$$

В силу ранее сказанного, нас будет интересовать случай, когда

$$1 - 2 \left( \frac{c_{11}}{\sigma_1} + \frac{c_{22}}{\sigma_2} \right) + \frac{4 \det C}{\sigma_1 \sigma_2} = 0.$$

Бесконечно удаленной точке будут соответствовать два решения исходного уравнения (1):

$$\Psi^+(x, \mu) = A, \quad \Psi^-(x, \mu) = (xI - \mu\Sigma^{-1})B,$$

где векторы  $A$  и  $B$  отличаются на постоянный множитель. Очевидно, что  $\Sigma A = CA$ , т.е. вектор  $A$  является собственным вектором для матрицы  $(\Sigma - C)$ , причем соответствующим нулевому собственному значению. Подставляя эти соотношения в уравнение (1), констатируем, что

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\sigma_1 - c_{11}}{c_{12}} = \frac{c_{21}}{\sigma_2 - c_{22}}.$$

**Полнота множества собственных функций. Случай треугольной матрицы рассеяния.** Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрим задачу для уравнения (1) с граничными условиями:

$$\Psi(0, \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ при } 0 < \mu < 1 \quad (9)$$

$$\Psi(x, \mu) = \Psi_{as}(x, \mu) = A_1 \Psi^+(x, \mu) + A_2 \Psi^-(x, \mu), \text{ при } -1 < \mu < 0, x \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Задачу (1), (9), (10) решает следующая теорема.

**Теорема 2.** Решение задачи (1), (9), (10) находится в виде:.

$$\Psi(x, \mu) = \Psi_{as}(x, \mu) + \int_0^{1/\sigma_2} e^{-\frac{x}{\eta}} \Phi(\eta, \mu) d\eta. \quad (11)$$

*Доказательство.* Положим в формуле (11)  $x = 0$ . Как результат получим:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mu \Sigma \Psi_{as}(0, \mu) + C \int_0^{\frac{1}{\sigma_2}} \frac{\eta}{\eta - \mu} n(\eta) d\eta + 2\mu \Lambda(\mu) n(\mu), \quad \text{где } 0 < \mu < \frac{1}{\sigma_2}.$$

Обозначая

$$N(z) = \int_0^{\frac{1}{\sigma_2}} \frac{\eta n(\eta)}{\eta - z} d\eta,$$

сведем полученное равенство к задаче Римана:

$$\Lambda^+(\mu)[C^{-1}\Sigma\Psi_{as}(0,\mu) + N^+(\mu)] = \Lambda^-(\mu)[C^{-1}\Sigma\Psi_{as}(0,\mu) + N^-(\mu)], \text{ где } 0 < \mu < \frac{1}{\sigma_2}. \quad (12)$$

В основе решения векторно-матричной задачи (12) лежит задача факторизации матричного коэффициента задачи Римана относительно неизвестной матрицы-функции  $X(z)$  размерности два

$$\Lambda^+(\mu)X^+(\mu) = \Lambda^-(\mu)X^-(\mu), \quad (13)$$

решаемая методами фактор-матрицы [12] или канонической матрицы [13]. Построение матрицы  $X(z)$  практически завершает доказательство теоремы, так как с учетом поведения функций на бесконечности можно будет утверждать, что

$$C^{-1}\Sigma\Psi_{as}(0,z) + N(z) = \Pi \cdot X(z),$$

где  $\Pi$  – постоянный вектор с произвольными коэффициентами  $\Pi_{1,2}$ , что определяет вектор-функцию  $N(z)$  с точностью до двух произвольных коэффициентов  $\Pi_{1,2}$ , а следовательно – задает с такой же степенью произвольности и вектор-функцию  $n(z)$ . Граничное условие (9) позволяет полностью определить коэффициенты  $\Pi_{1,2}$ , а следовательно – и решение задачи (1), (9), (10).

Решение задачи (13) представляет собой принципиальный шаг для обоих рассматриваемых случаев – общего и частного. В общем случае для решения однородной задачи Римана (13) базовый прием заключается в приведении матрицы-функции  $\Lambda(z)$  к диагональному виду. Однако в общем случае нашей задачи, в силу разрывности функции  $S(z)$  при переходе через главный разрез  $0 < \mu < \frac{1}{\sigma_2}$ , метод диагонализации матричного коэффициента  $[\Lambda^+(z)]^{-1}\Lambda^-(z)$  задачи (13) потребует решения дополнительных вспомогательных краевых задач.

Если рассмотреть частный случай, когда матрица рассеяния представляет собой верхнюю диагональную ( $c_{21} = 0$ ), то матричный коэффициент  $G(z) = [\Lambda^+(z)]^{-1}\Lambda^-(z)$  по построению будет представлять собой верхнюю треугольную матрицу – а следовательно, решение задачи (13) может быть найдено также в виде верхней треугольной матрицы

$$X(z) = \begin{bmatrix} X_{11}(z) & X_{12}(z) \\ 0 & X_{22}(z) \end{bmatrix},$$

причем функции  $X_{ij}(z)$  определяются из двух однородных скалярных задач Римана:

$$X_{11}^+(\mu) = G_{11}(\mu)X_{11}^-(\mu), \quad X_{22}^+(\mu) = G_{22}(\mu)X_{22}^-(\mu), \quad 0 < \mu < \frac{1}{\sigma_2}, \quad (14)$$

разрешимых на главном разрезе, и одной неоднородной

$$X_{12}^+(\mu) = G_{11}(\mu)X_{12}^-(\mu) + b(\mu), \quad 0 < \mu < \frac{1}{\sigma_2}, \quad (15)$$

где функция  $b(\mu) = G_{12}(\mu)X_{22}^-(\mu)$  в контексте (13) является известной. Решения скалярных задач (14)–(15) позволяют построить как частное решение матричной задачи (13), так и общее решение исходной задачи (12), что доказывает теорему в целом.

Аналогичный алгоритм позволяет построить доказательство теоремы о полноте собственных функций характеристического уравнения.

Таким образом, описанные алгоритмы позволяют ставить задачи на собственные значения, определять спектр и строить множества собственных функций для исследования решений векторного уравнения переноса – как в вырожденном, так и в невырожденном случае. Общая аналитическая теория собственных функций для задач такого типа может стать основой математического аппарата более общей теории решения уравнений указанного вида.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Case K.M. Elementary solutions of the transport equation and their applications // *Annals of physics* (N.Y.). – 1960. – Vol. 9, No. 1. – P. 1-23.
2. Cercignani C. Elementary solutions of the linearized gas-dynamics Boltzmann equation and their application to the slip-flow problem // *Ann.Phys.* (N.Y.). – 1962. – Vol. 20. – P. 219-233.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с
4. Gamzaev Kh. M. The Problem of Identifying the Trajectory of a Mobile Point Source in the Convective Transport Equation / Kh. M. Gamzaev // *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software.* – 2021. – Vol. 14, No. 2. – P. 78-84.
5. Garcia R. D. M., Siewert C. E., Thomas J. R. A Computationally Viable Version of the PN Method for Spheres // *Nuclear Science and Engineering.* – 2017. – No. 186. – P. 103-119.
6. Селиверстов В. В. Кинетическое уравнение диффузии в теории переноса нейтронов // *Атомная энергия.* – 2013. – Т. 114, № 6. – С. 308-315.
7. Germider O.V., Popov V.N. On the Calculation of the Poiseuille Number in the Annular Region for Non-isothermal Gas Flow // *Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics.* – 2023. – Vol. 16, No. 3. – P. 330-339.
8. Забродина Е.А., Николаева О.В., Фимин Н.Н., Четкин В.М. Гидродинамические течения в нагреваемых трубах с расчетом пограничного слоя по БГК-модели // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2021. – Т. 61, № 11. – С. 1937-1952.
9. Акимова В.А., Бугримов А.Л., Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение дисперсионного уравнения из второй задачи Стокса // *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика.* – 2013. – № 1. – С. 3-20.
10. Siewert C.E., Kelley C.T. An analytical solution to a matrix Riemann-Hilbert problem // *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP).* – 1980. – Vol. 31. – P. 344-351.
11. Siewert C.E., Kelley C.T., Garcia R.D.M. An analytical expression for the H-matrix relevant to Rayleigh scattering // *J. Math. Anal. and Appl.* – 1981. – Vol. 84, No. 12. – P. 509-518.
12. Латышев А.В. Аналитическое решение эллипсоидально-статистического модельного уравнения Больцмана // *Известия РАН. Механика жидкости и газа.* – 1992. – № 2. – С. 151-164.
13. Сушков В.В. Аналитическое решение векторных краевых задач теории газов // *Известия вузов. Математика.* – 2003. – № 3. – С. 32-41.
14. Енгибарян Н. Б. Резольвентное соотношение Соболева для векторных интегральных уравнений переноса в полупространстве // *Астрономический журнал.* – 2017. – Т. 94, № 7. – С. 631-638.
15. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. – М.: Мир, 1972. – 384 с.

*Поступила в редакцию 28.06.2024 г.*

#### SPECTRUM AND EIGENFUNCTIONS IN SOLVING THE TWO-GROUP CONSTANT-KERNEL TRANSFER EQUATION

*V.V. Sushkov*

The problem of constructing eigenvalues and eigenfunctions when solving vector two-group transfer equation with constant kernel is considered. The nodal points of the study are described: the search for eigenfunctions of the continuous spectrum in a set of distributions and the determination of coefficients of the continuous spectrum through the apparatus of boundary value problems of complex analysis. Continuous and discrete spectrum are highlighted. In the case of a degenerate scattering matrix, the reducibility of the problem to consider the scalar case is shown, the structure of eigenfunctions is determined depending on the properties of the transfer matrix. In the non-degenerate case, a set of eigenfunctions of the continuous spectrum is defined, a

structure for solving the boundary problem is constructed in the case when the infinitely distant point is a double point of the discrete spectrum, the proof is given for the special case of the triangular scattering matrix. Described is an algorithm for proving a theorem on the completeness of a set of eigenfunctions and constructing a solution to boundary value problems.

**Keywords:** boundary value problems, eigenvalues and eigenfunctions of discrete and continuous spectrum, distributions, Riemann boundary value problem, transfer equation, vector equation.

**Сушков Владислав Викторович**

кандидат физико-математических наук;  
ФГБОУ ВО «Сыктывкарский государственный  
университет имени Питирима Сорокина»,  
Сыктывкар, РФ.  
E-mail: vvsu@mail.ru

**Sushkov Vladislav Viktorovich**

candidate of physical and mathematical sciences;  
FSBEI HE «Pitirim Sorokin Syktyvkar State  
University»,  
Syktyvkar, Russia